где t — температура в градусах Цельсия. При высоких температурах коэффициент вязкости μ, коэффициенты теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v и коэффициент теплопро-

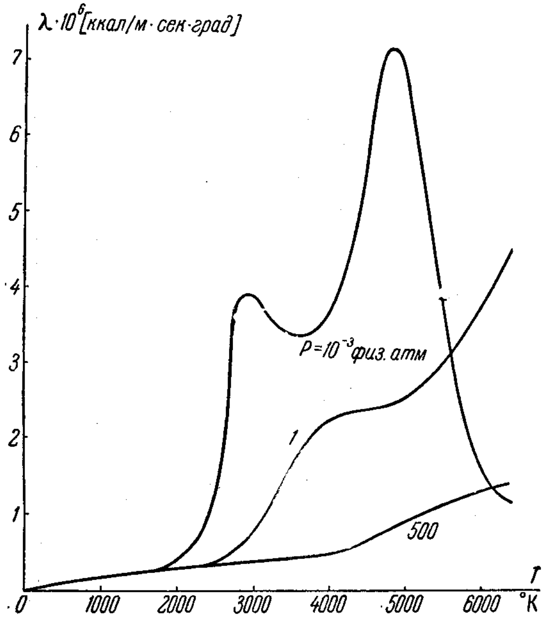

Рис. 1.11. Зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры и давления.

водности λ зависят не только от температуры T, но и от давления p[1]). Зависимости этих величин для воздуха от T при разных давлениях даны на рис. 1.9, 1.10, 1.11.

§ 9. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости. Свойство давлений в покоящейся жидкости

Для того, чтобы лучше уяснить себе природу нормальных напряжений, рассмотрим жидкость в условиях покоя. Важнейшим свойством жидкостей и газов, как уже указывалось в § 4, является то, что касательные напряжения появляются в них только при движении, когда одни части жидкости или газа перемещаются относительно других. В условиях покоя касательные напряжения в жидкости

[1]) См. Кибардин Ю. А. и др., Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока, Госэнергоиздат, 1961.

или газе равны нулю. Напряжение поверхностной силы в каждой точке направлено в этом случае по нормали к той площадке, на которую оно действует.

Кроме нормальных поверхностных сил, в покоящейся жидкости могут действовать объемные силы, к числу которых относится и сила тяжести.

Примем в качестве аксиомы следующее положение.

Жидкость может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда результирующая всех сил, приложенных к любой ее части, и результирующий момент этих сил равны нулю.

Если бы жидкость отвердела, то эти условия ее равновесия совпали бы с известными из механики условиями равновесия твердого тела.

Составим уравнения равновесия элементарной частицы жидкости. Возьмем прямоугольную систему координат, связанную с покоящейся жидкостью, и выделим в жидкости элементарный объем. Для этого возьмем некоторую начальную точку M_0 с координатами x, y, z, дадим координатам малые приращения, которые обозначим соответственно через Δx, Δy, Δz, и проведем через крайние точки этих отрезков плоскости, параллельные координатным плоскостям. Элементарный объем, который будет при этом выделен из жидкости, имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.12).

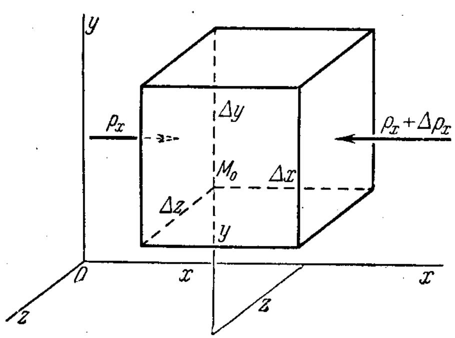

Рис. 1.12. К выводу дифференциальных уравнений равновесия жидкости.

Обозначим нормальные напряжения, которые приложены к его граням, проходящим через точку M_0, соответственно через p_x, p_y, p_z; индекс при букве p указывает ось, к которой перпендикулярна данная площадка. Если площадку передвинуть параллельно самой себе на малое расстояние, то нормальное напряжение, которое к ней приложено, получит малое приращение; например, нормальное напряжение, приложенное к левой грани, есть p_x, а приложенное к правой грани $p_x + \Delta p_x$.

Следует обратить внимание на то, что нормальные напряжения должны быть направлены внутрь элемента (по внутренним нормалям). Иными словами, жидкий элемент, как уже указывалось в § 3, должен находиться в сжатом состоянии; жидкость обычно слабо сопротивляется растягивающим напряжениям: в ней образуются при этом полости и разрывы [1]).

[1]) При определенных условиях в жидкости могут существовать и растягивающие напряжения. Если, например, охлаждать закрытую со всех сто-

Перейдем теперь к объемным силам и обозначим ускорение объемной силы (т. е. силу, приходящуюся на единицу массы) через $\mathbf{G}$, а его проекции на оси координат соответственно через X, Y, Z. Величина объемной силы может быть записана в виде произведения массы элемента на ускорение $\mathbf{G}$; так как масса элемента равна $\rho_{\text{ср}}\Delta x\Delta y\Delta z$, где $\rho_{\text{ср}}$ есть средняя плотность в пределах элемента, то проекции действующей на него объемной силы на оси координат равны соответственно $X\rho_{\text{ср}}\Delta x\Delta y\Delta z$, $Y\rho_{\text{ср}}\Delta x\Delta y\Delta z$, $Z\rho_{\text{ср}}\Delta x\Delta y\Delta z$.

Напишем уравнения равновесия для выделенного жидкого объема, т. е. приравняем нулю сумму проекций на каждую из осей координат сил, действующих на этот объем [1]:

$$\begin{aligned}
&\rho_{\text{ср}}X\Delta x\Delta y\Delta z+p_x\Delta y\Delta z-(p_x+\Delta p_x)\,\Delta y\Delta z=0,\\
&\rho_{\text{ср}}Y\Delta x\Delta y\Delta z+p_y\Delta x\Delta z-(p_y+\Delta p_y)\,\Delta x\Delta z=0,\\
&\rho_{\text{ср}}Z\Delta x\Delta y\Delta z+p_z\Delta x\Delta y-(p_z+\Delta p_z)\,\Delta x\Delta y=0.
\end{aligned}$$

Мы предполагаем здесь при вычислении проекций поверхностных сил, что ввиду малости граней параллелепипеда нормальное напряжение, приложенное к какой-либо грани, одинаково во всех ее точках и, следовательно, сила равна произведению напряжения на величину площадки. Неточность, которая получается в результате этого предположения, как увидим, легко может быть устранена. Раскроем скобки в уравнениях равновесия и разделим каждое уравнение почленно на массу элемента $\rho_{\text{ср}}\Delta x\Delta y\Delta z$. Тогда получим:

$$X-\frac{1}{\rho_{\text{ср}}}\frac{\Delta p_x}{\Delta x}=0,\qquad Y-\frac{1}{\rho_{\text{ср}}}\frac{\Delta p_y}{\Delta y}=0,\qquad Z-\frac{1}{\rho_{\text{ср}}}\frac{\Delta p_z}{\Delta z}=0.$$

Эти уравнения, как указывалось, неточны, и кроме того, они написаны для элемента, имеющего случайные размеры Δx, Δy, Δz. Для того чтобы избавиться от этих недостатков, перейдем в последних уравнениях к пределу, уменьшая до нуля размеры объема. В пределе при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ плотность $\rho_{\text{ср}}$ будет равна плотности ρ в точке M_0, нормальные напряжения также будут напряжениями в точке M_0, действующими на бесконечно малые площадки, перпендикулярные к осям координат; отношения приращений дадут соответствующие частные производные. После перехода к пределу мы полу-

---

рон трубку, заполненную жидкостью, то до некоторого момента жидкость не уменьшается в объеме, а продолжает заполнять всю трубку, прилипая к стенкам. Мы имеем здесь дело с всесторонне растянутой жидкостью. Судя по результатам опытов, величина растягивающего напряжения может достигать, например, для воды 20 *атм*. По-видимому, при движении воды в турбинах с большой скоростью в условиях отсутствия кавитации также возникают растягивающие напряжения в жидкости.

[1]) Нетрудно убедиться в том, что уравнения равновесия для моментов сил, приложенных к элементу, относительно осей координат приводятся к тем же уравнениям, какие имеют место для проекций сил. Поэтому мы не составляем уравнений моментов.

чим уравнения, в которых все величины относятся к исходной точке M_0; эти уравнения равновесия будут иметь вид:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}=0, \qquad Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}=0, \qquad Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}=0. \quad (1.6)$$

Обычно в вопросах, относящихся к равновесию жидкостей, объемные силы бывают заданы, и задача заключается в том, чтобы найти распределение плотности и нормальных напряжений. Но последних уравнений недостаточно для решения этой задачи, так как они содержат четыре неизвестных величины и из них три — под знаками частных производных. Займемся поэтому составлением дополнительных зависимостей между этими неизвестными.

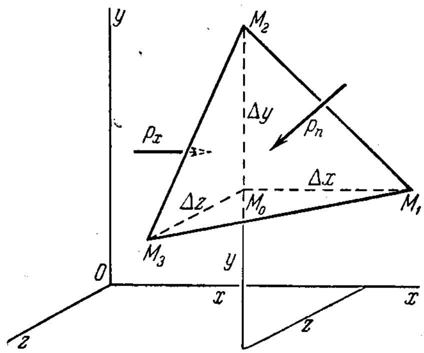

Рис. 1.13. Нормальные напряжения, действующие на грани элементарного тетраэдра.

Выделим в жидкости вновь элементарный объем. Дадим координатам x, y, z точки M_0 приращения, соответственно равные Δx, Δy, Δz, и проведем плоскости через каждую пару этих отрезков и через их конечные точки. Из жидкости выделится тогда элемент (рис. 1.13), имеющий форму четырехгранной пирамиды (тетраэдра). Специфическая форма этого элемента позволит ввести в каждое из уравнений равновесия, кроме напряжения на площадке, перпендикулярной к соответствующей оси координат, также напряжение p_n, действующее на наклонную площадку. Мы сможем, таким образом, сопоставить между собой нормальные напряжения, действующие на площадки, проходящие через M_0, и различным образом ориентированные, и получим в результате искомую зависимость между этими напряжениями.

Составим сначала уравнение равновесия тетраэдра в проекции на ось x; остальные уравнения можно затем написать по аналогии с этим. Масса тетраэдра равна $\rho_{ср}\Delta V$, где ΔV — его объем; проекция на ось x объемных сил равна $X\rho_{ср}\Delta V$, проекция на эту же ось сил давления равна

$$p_x\Delta S_x - p_n\Delta S_n\cos(n,\ x),$$

где ΔS_x и ΔS_n означают соответственно величины площадок $M_0M_2M_3$ и $M_1M_2M_3$. Уравнение равновесия будет иметь вид

$$\rho_{ср}X\Delta V + p_x\Delta S_x - p_n\Delta S_n\cos(n, x) = 0.$$

Обратим внимание на то, что угол между нормалью n к площадке $M_1M_2M_3$ и осью x по свойству углов между взаимно перпендикулярными направлениями равен углу, измеряющему двугранный угол между площадками $M_0M_2M_3$ и $M_1M_2M_3$. Вследствие этого

$$\Delta S_n \cos(n, x) = \Delta S_x,$$

и уравнение равновесия после почленного деления на ΔS_x принимает вид:

$$\rho_{\text{ср}} \frac{\Delta V}{\Delta S_x} X + p_x - p_n = 0.$$

Перейдем в этом уравнении к пределу, устремляя Δx, Δy, Δz к нулю, т. е. стягивая тетраэдр к точке M_0. Если считать при этом Δx, Δy, Δz за малые величины первого порядка малости, то ΔS_x будет малой величиной второго порядка, а ΔV — малой величиной третьего порядка. Поэтому отношение $\Delta V/\Delta S$ будет стремиться к нулю, и в пределе получится $p_x - p_n = 0$; следовательно $p_x = p_n$.

Аналогично, составляя уравнения для проекций сил на ось y и на ось z, будем иметь:

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n.$$

Таким образом, в покоящейся жидкости давление, действующее на наклонную площадку, проходящую через какую-либо точку, оказывается таким же, как давления, действующие на площадки, проходящие через ту же точку и параллельные координатным плоскостям. Так как координатные плоскости были выбраны произвольно, то отсюда вытекает следующее свойство давлений в покоящейся жидкости. *Давление в любой точке покоящейся жидкости остается постоянным для всех площадок, проходящих через эту точку*, т. е. иными словами, *не зависит от ориентировки площадки, на которую оно действует.* В силу этого можно рассматривать давление в покоящейся жидкости как величину скалярную, зависящую для данной жидкости только от координат точки.

Так как

$$p_x = p_y = p_z,$$

то мы будем опускать в дальнейшем значок при p, указывающий ориентировку площадки. Дифференциальные уравнения равновесия (1. 6) примут теперь вид:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

Плотность ρ является в общем случае функцией давления в данной точке и температуры:

$$\rho = f(p, T).$$

Последнее уравнение, которое называется характеристическим, следует присоединить к уравнениям (1. 7), и тогда получится полная система уравнений, определяющая распределение давления и плотности в покоящейся жидкости при заданных объемных силах и распределении температуры.

Для практического вычисления давления и плотности удобно представить уравнения (1.7) в виде одного, эквивалентного им уравнения, не содержащего частных производных. Умножим почленно первое из уравнений (1.7) на dx, второе — на dy, третье — на dz и затем сложим все три уравнения; тогда получим:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Так как выражение в скобках есть полный дифференциал давления, то последнее уравнение можно записать в виде

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \frac{1}{\rho}\,dp = 0. \tag{1.8}$$

Предполагая, что из объемных сил на жидкость действуют только силы тяжести, и направив ось z вертикально вверх, будем иметь:

$$X = Y = 0, \qquad Z = -g.$$

Уравнение равновесия (1.8) при этом примет вид:

$$g\,dz + \frac{1}{\rho}\,dp = 0. \tag{1.9}$$

Если рассматривать dx, dy, dz как проекции отрезка $\boldsymbol{ds}$ на оси координат, то выражение $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ будет скалярным произведением векторов $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{ds}$. Уравнение равновесия можно поэтому представить в следующей, наиболее краткой форме:

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{ds} = G\,ds\cos(G,\ ds) = \frac{1}{\rho}\,dp,$$

или, если обозначить $G\cos(G,\ ds)$ через G_s, то можно написать:

$$\frac{dp}{ds} = \rho G_s. \tag{1.10}$$

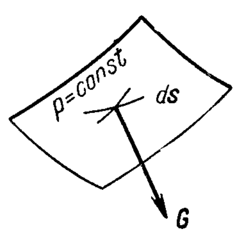

Рис. 1.14. Результирующее ускорение объемных сил направлено в жидкости по нормали к поверхности равного давления.

Из этих равенств видно, что если $\cos(G,\ ds) = 0$, т. е. $\boldsymbol{G}$ перпендикулярно к $\boldsymbol{ds}$, то и $dp = 0$, т. е. $p = \text{const}$. Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется поверхностью равного давления. Таким образом, вектор ускорения объемных сил в данной точке перпендикулярен ко всякому отрезку $\boldsymbol{ds}$, проходящему через ту же точку и лежащему в поверхности равного давления, т. е., иными словами, вектор $\boldsymbol{G}$ направлен по нормали к поверхности равного давления (рис. 1. 14).

Это свойство поверхностей равного давления, так же как равенства (1.7) — (1.10), имеет место не только для покоящейся жидкости, но и для жидкости, движущейся вместе с резервуаром, в котором она находится (например, жидкое горючее, находящееся в баке на летящем самолете или ракете, жидкость в центрифуге, в муфте гидропередачи и т. д.). В самом деле, включив в число сил, действующих на жидкость, инерционные силы, мы по известному из механики принципу Даламбера можем рассматривать жидкость, как находящуюся в равновесии, и следовательно, можем применять к ней упомянутые уравнения равновесия. Нужно только понимать в этом случае под G ускорение результирующей объемной силы, т. е. силы, в которую, кроме фактически действующих, включена и инерционная сила. Если движение резервуара вместе с жидкостью задано и жидкость находится в относительном равновесии, то можно определить ускорения всех частиц, а значит, и результирующее ускорение объемной силы, как функцию координат точки и времени. Уравнения (1.8) — (1.10) позволяют в этом случае найти распределение давлений в жидкости.

§ 10. Равновесие несжимаемой жидкости. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим наиболее простой и вместе с тем важный случай, когда покоящаяся жидкость несжимаема и во всех точках имеет одинаковую температуру. В этом случае $\rho = \text{const}$ и, интегрируя уравнение (1.9), находим:

$$p + \gamma z = \text{const}, \tag{1.11}$$

или

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) является основным уравнением гидростатики несжимаемой жидкости. Постоянную интегрирования в правой части можно определить, если заданы так называемые граничные условия, т. е. условия, которым удовлетворяет давление на границах жидкости. Если, например, жидкость находится в резервуаре и над ее свободной поверхностью давление равно p_0, то, взяв за плоскость отсчета высот свободную поверхность, получим граничное условие: при $z = 0$ $p = p_0$. Уравнение (1.11) тогда запишется в виде

$$p = p_0 - \gamma z. \tag{1.13}$$

Последнее равенство показывает, что давление в любой точке покоящейся несжимаемой жидкости при изотермическом состоянии зависит от трех величин: давления p_0 на граничной поверхности, высоты z данной точки над граничной поверхностью и объемного веса жидкости γ. Из последнего равенства также видно, как именно зависит давление в любой точке покоящейся жидкости от этих трех величин. Если давление p_0 на граничной поверхности