в пьезометре — вертикальной трубке (рис. 1.17), нижний конец которой открыт и опущен в жидкость (предполагаем для простоты, что верхний конец трубки закрыт и что в верхней части трубки — торричеллиева пустота). Высота $z$ называется геометрической, или нивелирной, высотой. Согласно уравнению (1.12) сумма пьезометрической и геометрической высот есть величина постоянная во всех точках покоящейся несжимаемой жидкости.

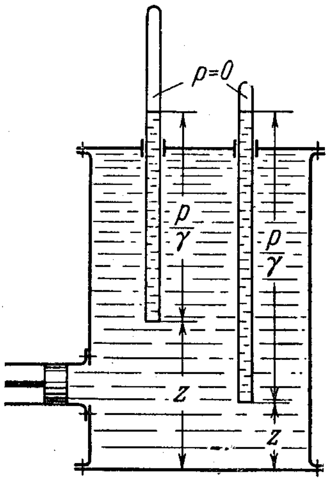


Рис. 1.17. Схема измерения давления в жидкости с помощью пьезометра. Сумма геометрической высоты и пьезометрической есть величина постоянная во всех точках покоящейся несжимаемой жидкости.

## § 11. Равновесие газа. Международная стандартная атмосфера

Выводы предыдущего параграфа, которые относятся к несжимаемой жидкости, далеко не всегда можно применять к покоящемуся газу и, в частности, к воздушной среде. Поэтому мы рассмотрим отдельно равновесие сжимаемой жидкости.

Предположим сначала, что температура во всех точках покоящегося газа есть величина постоянная (изотермическая атмосфера). В этом случае, как видно из формулы (1.2), зависимость плотности от давления принимает вид

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}.$$

Подставляя это выражение для плотности в уравнение равновесия жидкости в полных дифференциалах (1.9), получим:

$$g\,dz + \frac{p_0}{\rho_0}\frac{dp}{p} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$gz + \frac{p_0}{\rho_0}\ln p = \text{const}. \tag{1.14}$$

Постоянную интегрирования определим из граничного условия: при $z = 0$ $p = p_0$; из уравнения при этом следует, что $\text{const} = \frac{p_0}{\rho_0}\ln p_0$.

Из уравнения (1.14) сразу же получается так называемая барометрическая формула для случая постоянной по высоте температуры:

$$z = \frac{p_0}{\gamma_0}\ln\frac{p_0}{p},$$

где $\gamma_0 = \rho_0 g$ [1]). По этой формуле можно определить превышение одной точки над другой в изотермической атмосфере по барометрическим наблюдениям в обеих точках.

Из барометрической формулы можно получить также закон изменения давления и плотности по высоте в случае изотермической атмосферы. Решая эту формулу относительно $p/p_0$, находим:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} z},$$

и так как

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0},$$

то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} z}.$$

Здесь $p_0/\gamma_0$ есть некоторая пьезометрическая высота, которую мы обозначим через $H$.

Если $p_0$ есть атмосферное давление на уровне моря, а $\gamma_0$ — объемный вес воздуха на той же высоте, то $H$ можно рассматривать как высоту, которую имела бы земная атмосфера в случае, если бы воздух был несжимаемой однородной жидкостью с объемным весом $\gamma_0$. Эта высота $H$ называется высотой однородной атмосферы; как видно из численных величин $p_0$ и $\gamma_0$, она равна $H = 8425$ *м*. Введя высоту $H$, можно записать формулы для изменения давления и плотности с высотой в следующем виде:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{z}{H}}.$$

Эти формулы называются формулами Галлея; на рис. 1.18 представлено графически изменение давления и плотности по этим формулам. Из графика видно, что давление в изотермической атмосфере убывает при возрастании высоты значительно медленнее, нежели в случае несжимаемой жидкости. Оно, в отличие от давления в несжимаемой

[1]) Мы пренебрегаем здесь изменением ускорения силы тяжести по высоте. Если считать землю за однородный шар с радиусом в 6370 *км*, то для высот до 20 *км* над уровнем моря изменение $g$ не превосходит 0,6% от его значения на нулевой высоте. В действительности ускорение свободного падения зависит как от географической широты данного места $\varphi$, так и от высоты $z$ над уровнем моря, и для больших высот это необходимо учитывать; оно определяется формулой

$$g = g_0 (1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi)(1 - 0{,}000000314 z),$$

где $g_0 = 980{,}616$ *см/сек*$^2$ есть ускорение свободного падения на широте 45° и уровне моря.

жидкости, ни при каком значении $z$ не становится равным нулю; если бы среда была несжимаемой, то, как следует из уравнения (1.13), давление стало бы равным нулю на высоте $H=p_0/\gamma$.

Однако при небольших значениях $z$ можно с достаточной точностью определять давления в газе по формуле (1.13) для несжимаемой жидкости. В самом деле, разлагая правую часть формулы Галлея в степенной ряд, получим, что в изотермической атмосфере

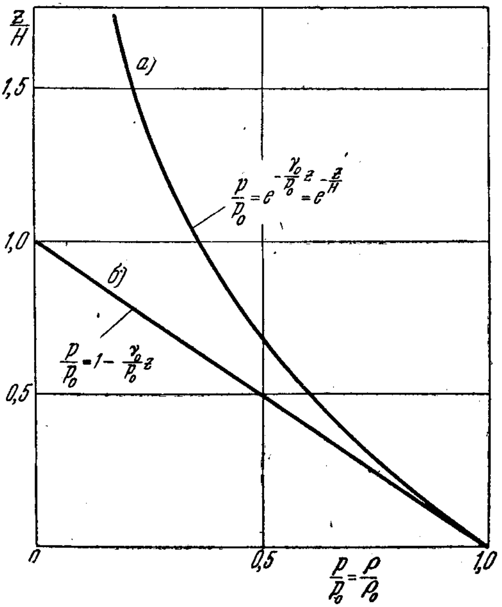


Рис. 1.18. а) Изменение давления и плотности с высотой в изотермической атмосфере; б) изменение давления с высотой в случае несжимаемой жидкости ($H$ — высота однородной атмосферы).

$$\frac{p}{p_0}=1-\frac{\gamma_0 z}{p_0}+\frac{1}{2}\frac{\gamma_0^2 z^2}{p_0^2}-\ldots$$

Первые два слагаемых в правой части здесь такие же, как в выражении для $p/p_0$ по формуле (1.13). Так как степенной ряд здесь знакопеременный, то погрешность, которая получается при отбрасывании всех слагаемых ряда, начиная с какого-либо, не превосходит первого отбрасываемого слагаемого. Поэтому погрешность $\Delta(p/p_0)$ при вычислении давлений в покоящемся газе по формуле (1.13) для несжимаемой жидкости не превышает $\frac{1}{2}\frac{\gamma_0^2 z^2}{p_0^2}$:

$$\left|\Delta\left(\frac{p}{p_0}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{z}{H}\right)^2.$$

Если, например, $(z/H)^2\leqslant{}^1/_{50}$, т. е. $z\leqslant 1200$ *м*, то с погрешностью, не провосходящей одного процента, можно определять давления в газе при изотермическом состоянии так, как если бы он был несжимаемой жидкостью, т. е. по формуле (1.13).

Многочисленные наблюдения показывают, что в нижних слоях атмосферы температура не является постоянной величиной, а уменьшается при возрастании высоты приблизительно по линейному закону [1]). Вычислим, как при этом изменяются давление и плотность. Предпо-

---

[1]) Это уменьшение объясняется тем, что теплопроводность воздуха меньше, чем теплопроводность земли, и вследствие этого передача тепла в атмосферу при нагревании солнечными лучами происходит от земной поверхности. Слои воздуха, непосредственно прилегающие к земной поверхности, оказываются поэтому более нагретыми, чем слои, удаленные от нее.

ложим, что абсолютная температура $T$ изменяется с высотой по линейному закону:

$$T = T_0 - \beta z.$$

Величина $\beta$ в этой формуле называется температурным градиентом (она измеряется в *град/м*); она показывает, на сколько градусов изменяется температура при подъеме на один метр. По формуле (1.2) находим, что при линейном изменении температуры с высотой плотность равна

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T_0 - \beta z} = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{T_0} z}. \tag{1.15}$$

Подставим это выражение в уравнение равновесия в полных дифференциалах (1.9); тогда получим:

$$g\,dz + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{dp}{p} \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right) = 0.$$

Разделим здесь переменные:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} \frac{dp}{p} = - \frac{dz}{1 - \frac{\beta}{T_0} z}.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} \ln p = \frac{T_0}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right) + \text{const}.$$

В качестве граничного условия возьмем: при $z = 0$, $p = p_0$; тогда постоянная интегрирования будет равна $(p_0/\gamma_0) \ln p_0$, и из последнего равенства получаем:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\beta} \frac{\gamma_0}{p_0}}. \tag{1.16}$$

Изменение плотности с высотой получается из последней формулы и формулы (1.15):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\beta} \frac{\gamma_0}{p_0} - 1}. \tag{1.17}$$

Равенства (1.16) и (1.17) называются формулами Бьеркнеса; вместе с формулами Галлея они положены в основу построения так называемой Международной стандартной атмосферы (МСА).

Так как действительные давления, плотности и температуры воздуха сильно изменяются в зависимости от высоты, географических координат места на земной поверхности, времени года и погоды, то для расчетов и для сопоставления результатов испытания летательных аппаратов необходимо иметь некоторые единые условные законы изменения давления, плотности и температуры, которые позволяли бы сравнивать между собой опытные и расчетные данные. В качестве таких условных законов приняты зависимости, полученные в результате статистической обработки многолетних метеорологических наблюдений в средних широтах. Атмосфера, в которой температура, давление и плотность изменяются с высотой по этим условным законам, является Международной стандартной атмосферой.

Прилегающий к земной поверхности слой атмосферы называется тропосферой. Он простирается (в наших средних географических широтах) до высоты приблизительно в 11 *км* над уровнем моря (в тропиках — до высоты 14—17 *км*). В этом слое температура считается убывающей по линейному закону при возрастании высоты. Слой атмосферы над тропосферой называется стратосферой. В стратосфере до высоты приблизительно в 30 *км* температура считается постоянной.

В Международной стандартной атмосфере за плоскость отсчета высот ($z=0$) принят уровень моря; для этого уровня приняты следующие начальные значения величин, характеризующих состояние атмосферы: температура $t_0=15^\circ$ C ($T_0=288^\circ$ K), давление $p_0=$ $=10\,330$ *кг/м*$^2$ (760 *мм* рт. ст.), плотность воздуха $\rho_0=0{,}125$ *кгсек*$^2$/*м*$^4$ (объемный вес $\gamma_0=1{,}225$ *кг/м*$^3$).

Для высот до 11 *км* в Международной стандартной атмосфере принят линейный закон изменения температуры с высотой

$$T=288-0{,}0065z;$$

температурный градиент, как отсюда видно, считается равным $\beta=$ $=0{,}0065$ *град/м* $=6{,}5$ *град/км*. На высоте $z=11$ *км* по этому закону получается температура, равная $T_{11}=288-11\times6{,}5=216{,}5^\circ$ K ($t_{11}=-56{,}5^\circ$ C). Подставляя вместо $T_0$, $p_0$, $\gamma_0$ и $\beta$ соответствующие численные значения этих величин в формулы (1.16) и (1.17), получим выражения для изменения давления и плотности по Международной стандартной атмосфере для высот до 11 *км* над уровнем моря:

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{z}{44\,300}\right)^{5,256}, \quad \frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{z}{44\,300}\right)^{4,256}$$

(в этих формулах высота $z$ выражена в метрах).

Для высот $z\geqslant 11$ *км* температура считается постоянной величиной, равной $T_{11}=216{,}5^\circ$ K ($t_{11}=-56{,}5^\circ$ C). Значения давления и объемного веса воздуха на высоте $z=11$ *км* получаются по последним формулам соответственно равными: $p_{11}=2301$ *км/м*$^2$, $\gamma_{11}=$ $=0{,}3636$ *кг/м*$^3$. Подставляя эти значения в формулы Галлея, получим выражения для изменения давления и плотности по Международной стандартной атмосфере для высот $z\geqslant 11$ *км*:

$$\frac{p}{p_{11}}=\frac{\rho}{\rho_{11}}=e^{-\frac{z-11\,000}{6340}}.$$

Значения температуры, давления и плотности воздуха на разных высотах, вычисленные по формулам Международной стандартной атмосферы, а также значения коэффициента кинематической вязкости воздуха $\nu$ и скорости распространения звука $a$ сведены в таблицу МСА [1]). Изменение температуры $T$, плотности $\rho$ и давления $p$ с высотой в МСА изображены в виде графика на рис. 1.19.

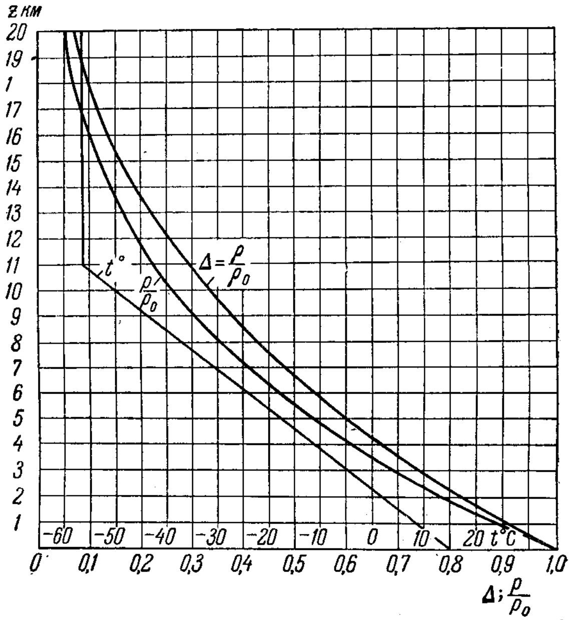


Рис. 1.19. Распределение давления, температуры и плотности в Международной стандартной атмосфере.

Для высот $z \leqslant 11$ *км* можно рекомендовать вместо формул Международной стандартной атмосферы более простые для вычисления приближенные формулы, которые дают результаты, весьма близкие к точной формуле. Приближенная формула для отношения давлений имеет вид:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{16\,850 - z}{16\,850 + z},$$

а приближенная формула для отношения плотностей —

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{20\,000 - z}{20\,000 + z}$$

(высота $z$ выражена в метрах).

[1]) См., например, Справочник авиаконструктора, т. I, 1937.