ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЭРОДИНАМИКИ

§ 1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности движения

Закон сохранения массы и закон сохранения энергии представляют собой наиболее общие законы физики, распространяющиеся на все физические явления. Эти законы являются основными и в аэродинамике.

Положение о неизменности массы первоначально представляло собой гипотезу; будучи многократно проверенной на эксперименте в самых разнообразных областях физики, гипотеза приобрела характер всеобщего физического закона. Лишь в XX веке теорией относительности были внесены коррективы в закон сохранения массы: именно было указано на необходимость его совместной трактовки с законом сохранения энергии. Принципиально этим было внесено много нового в понимание природы материи; однако количественные поправки, которые вносятся теорией относительности в закон сохранения массы, настолько незначительны, что в вопросах, рассматриваемых в данном курсе, ими можно пренебрегать.

Применительно к элементу движущейся жидкой среды закон сохранения массы имеет и до настоящего времени фундаментальное значение для всей механики жидкостей. Перейдем к выводу уравнения, выражающего этот закон.

Выделим в движущейся жидкости некоторый движущийся жидкий [1]) объем V; запишем, что *масса M этого объема во все время движения остается неизменной.* Если ввести в рассмотрение массовую плотность жидкости ρ, вообще говоря, различную в разных точках, то массу выделенного объема можно выразить в виде произведения $\rho_{cp}V$, где ρ_{cp} есть некоторая средняя в пределах объема V массовая плотность. Постоянство массы M во времени t можно записать в такой форме:

$$\frac{d(\rho_{cp}V)}{dt}=0,$$

или так как переменными являются здесь и плотность жидкости, и величина выделенного объема, то

$$V\frac{d\rho_{cp}}{dt}+\rho_{cp}\frac{dV}{dt}=0.$$

---

[1]) То есть состоящий во все время движения из одних и тех же частиц жидкости.

Разделим это уравнение почленно на массу объема, т. е. на произведение $\rho_{cp}V$; тогда получим:

$$\frac{1}{\rho_{cp}}\frac{d\rho_{cp}}{dt}+\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=0.$$

Величина dV представляет собой изменение первоначально выделенного объема V и является, следовательно, величиной объемной деформации. Отношение dV/V можно рассматривать как относительную объемную деформацию (т. е. отнесенную к единице объема). Второе слагаемое в левой части последнего равенства представляет собой скорость относительной объемной деформации. Аналогично первое слагаемое можно рассматривать как скорость относительного изменения средней плотности. Сумма этих двух скоростей должна быть всегда равна нулю; если, например, скорость объемной деформации положительна по знаку (объем увеличивается), то скорость изменения плотности есть величина отрицательная (плотность уменьшается с течением времени), и наоборот.

Последнее уравнение, однако, не совсем удобно, так как содержит не вполне определенную величину ρ_{cp}, зависящую от произвольно выбранного V. Для того чтобы получить уравнение, свободное от этого случайного элемента и вместе с тем такое, которое характеризовало бы движение жидкости в данной точке, перейдем в последнем уравнении к пределу, уменьшая объем V до нуля и стягивая его при этом к некоторой внутренней его точке.

В пределе при $V\to 0$, получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=0. \tag{2.1}$$

Здесь ρ есть плотность в той точке, к которой стягивается объем V, а второе слагаемое есть относительная скорость объемной деформации в той же точке. Последнее уравнение (в отличие от предыдущего) не зависит ни от величины, ни от формы первоначально выделенного объема и относится не к объему, а к данной точке в жидкости.

Уравнение (2.1) называется *уравнением неразрывности движения*. В частном случае, когда жидкость несжимаема ($\rho=\text{const}$), уравнение неразрывности движения принимает вид

$$\frac{dV}{dt}=0.$$

Закон сохранения массы принимает в этом случае форму закона сохранения объема ($V=\text{const}$).

Скорость относительной объемной деформации непосредственно связана со скоростями движения частиц на поверхности выделенного объема. В самом деле, изменение dV выделенного объема можно рассматривать как результат перемещения частиц, которые находились в начале промежутка времени dt на поверхности S, ограничивающей объем, в некоторые новые положения. Пусть, например, площадка dS переместилась за время dt в положение dS' (рис. 2.1). Изменение первоначально выделенного объема V, которое от этого произошло, можно подсчитать, пренебрегая малыми более высоких порядков, как произведение $dSdl_n$, где l_n означает проекцию образующей l показанного на рисунке элементарного цилиндрика на направление нормали к площадке dS (за положительное направление нормали условимся при этом принимать направление внешней нормали). Если через v обозначить величину скорости частицы жидкости, находящейся на площадке dS, то длину пути dl можно выразить в виде $v\,dt$ и, следовательно, $dl_n = v_n dt$. Объем рассматриваемого элементарного цилиндрика равен $v_n dt\, dS$, а общее приращение $d\mathrm{V}$ выделенного объема есть, очевидно, сумма объемов таких элементарных цилиндриков, построенных на площадках dS:

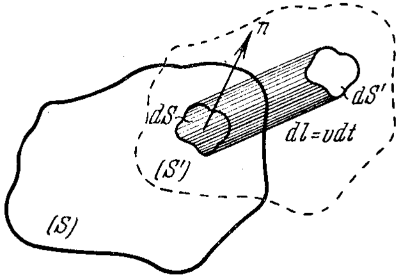

Рис. 2.1. К определению скорости объемной деформации.

$$d\mathrm{V} = \iint\limits_{(S)} v_n\, dt\, dS.$$

Вынося здесь dt за знак интеграла, так как оно одинаково для всех цилиндриков, получим скорость объемной деформации в виде

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \iint\limits_{(S)} v_n\, dS. \qquad (2.2)$$

Выражение, которое здесь получилось для скорости объемной деформации, имеет еще иной физический смысл, если с иной точки зрения рассматривать поверхность S. Будем представлять себе, что S — неподвижная, мысленно проведенная внутри жидкости замкнутая поверхность и что жидкость течет сквозь нее. Тогда $v_n dS$ есть, очевидно, объем жидкости, протекающей за единицу времени через площадку dS такой поверхности, т. е. секундный (объемный) расход жидкости сквозь площадку dS; в зависимости от знака v_n он может быть положительным или отрицательным, что соответствует вытеканию жидкости из объема, ограниченного поверхностью S, или, наоборот, втеканию внутрь поверхности S; интеграл же от этого выражения представляет собой объемный расход жидкости сквозь всю поверхность S.

То обстоятельство, что для несжимаемой жидкости $d\mathrm{V}/dt = 0$ можно с только что изложенной точки зрения трактовать как равенство объемов вытекающей и втекающей жидкостей для любой замкнутой поверхности, проведенной в заполненном жидкостью пространстве. Следует подчеркнуть, что это есть свойство только несжимаемой жидкости; для сжимаемой, как видно из общего уравнения сохранения массы, это свойство, вообще говоря, не имеет места.

Вернемся теперь к уравнению (2.1) и подставим в него вместо $d\mathrm{V}/dt$ его выражение (2.2); тогда получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathrm{V}\to 0} \frac{\iint\limits_{(S)} v_n dS}{\mathrm{V}} = 0.$$

Второе слагаемое представляет собой удельный объемный расход жидкости сквозь поверхность, стягиваемую к точке; оно называется *дивергенцией* (или *расхождением*) вектора скорости в данной точке и обозначается $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{\mathrm{V}\to 0} \frac{\iint\limits_{(S)} v_n dS}{\mathrm{V}}. \qquad (2.3)$$

Названия *«дивергенция»*, *«расхождение»* обусловлены тем, что двойной интеграл в этой формуле можно рассматривать как расход жидкости сквозь поверхность S.

Равенство (2.1) с помощью введенного здесь сокращенного обозначения для второго слагаемого в левой части может быть переписано так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{2.4}$$

или для частного случая несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0. \tag{2.5}$$

§ 2. Уравнение расхода для несжимаемой жидкости и для газа

В этом параграфе мы будем предполагать, что движение жидкости *установившееся*, т. е. такое, что *в каждой точке потока скорость, плотность и прочие характеристики движения остаются с течением времени постоянными*. Вся картина движения при этом неизменна во времени.

Особенно простым и удобным для применения является уравнение неразрывности движения в том случае, когда известна форма струек. Понятие «струйка» определяется в аэродинамике следующим образом: пусть L (рис. 2.2) будет элементарный замкнутый контур, мысленно проведенный в жидкой среде. Представим себе траектории всех частиц жидкости, находящихся в данный момент на контуре L; траектории эти образуют поверхность, которая называется поверхностью струйки; часть жидкости, ограниченная этой поверхностью, называется струйкой.

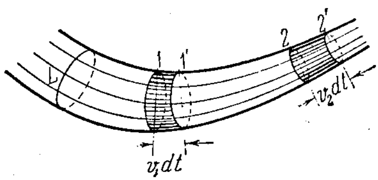

Рис. 2.2. К выводу уравнения расхода жидкости для элементарной струйки.

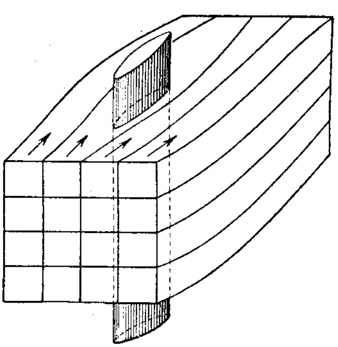

Рис. 2.3. Одно из возможных делений потока жидкости на элементарные струйки.

В случае установившегося движения траектории частиц не пересекаются друг с другом или сами с собой и жидкость, ограниченная поверхностью струйки, течет, оставаясь все время внутри струйки. Поток жидкости всегда можно представить себе разделенным на элементарные струйки тем или иным способом (рис. 2.3).

Выделим в жидкости объем V двумя произвольными поперечными сечениями *1* и *2* и боковой поверхностью струйки (как показано на