Названия *«дивергенция»*, *«расхождение»* обусловлены тем, что двойной интеграл в этой формуле можно рассматривать как расход жидкости сквозь поверхность S.

Равенство (2.1) с помощью введенного здесь сокращенного обозначения для второго слагаемого в левой части может быть переписано так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2.4}$$

или для частного случая несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{2.5}$$

§ 2. Уравнение расхода для несжимаемой жидкости и для газа

В этом параграфе мы будем предполагать, что движение жидкости *установившееся*, т. е. такое, что *в каждой точке потока скорость, плотность и прочие характеристики движения остаются с течением времени постоянными*. Вся картина движения при этом неизменна во времени.

Особенно простым и удобным для применения является уравнение неразрывности движения в том случае, когда известна форма струек. Понятие «струйка» определяется в аэродинамике следующим образом: пусть L (рис. 2.2) будет элементарный замкнутый контур, мысленно проведенный в жидкой среде. Представим себе траектории всех частиц жидкости, находящихся в данный момент на контуре L; траектории эти образуют поверхность, которая называется поверхностью струйки; часть жидкости, ограниченная этой поверхностью, называется струйкой.

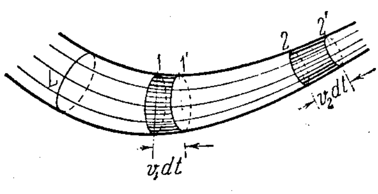

Рис. 2.2. К выводу уравнения расхода жидкости для элементарной струйки.

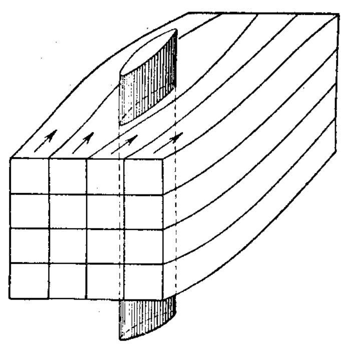

Рис. 2.3. Одно из возможных делений потока жидкости на элементарные струйки.

В случае установившегося движения траектории частиц не пересекаются друг с другом или сами с собой и жидкость, ограниченная поверхностью струйки, течет, оставаясь все время внутри струйки. Поток жидкости всегда можно представить себе разделенным на элементарные струйки тем или иным способом (рис. 2.3).

Выделим в жидкости объем V двумя произвольными поперечными сечениями *1* и *2* и боковой поверхностью струйки (как показано на рис. 2.2). Запишем уравнение неразрывности движения в виде

$$\frac{dM}{dt}=0,$$

где M есть масса объема V. За время Δt сечения *1* и *2* сдвинутся вдоль струйки и займут новые положения, которые мы обозначим соответственно через *1'* и *2'*. Объем *1'2'* можно получить из первоначального объема *12*, если к *12* прибавить объем *22'* и вычесть объем *11'*.

В общем случае изменение массы объема *12* происходит от трех причин: во-первых, от прибавления объема *22'*, во-вторых от вычитания объема *11'* и, в-третьих, от изменения плотности за время Δt в общей части обоих положений объема, т. е. в объеме *1'2*. Но если движение является установившимся, т. е. величины, характеризующие движение в данной точке, и, в частности, плотность, не зависят от времени, то третья причина отпадает и остаются лишь первые две. В этом случае

$$\Delta M=\Delta M_{22'}-\Delta M_{11'}=\rho_{2\text{ср}}\Delta V_{22'}-\rho_{1\text{ср}}\Delta V_{11'},$$

где $\rho_{1\text{ср}}$ есть средняя плотность в объеме *11'*, а $\rho_{2\text{ср}}$ — средняя плотность в объеме *22'*; величины этих объемов обозначены через ΔV, а массы — через ΔM с соответствующими индексами. Каждый из этих объемов, ввиду малости Δt, можно вычислить как объем цилиндра, у которого основанием служит поперечное сечение струйки, а высотой — пройденный сечением путь. Ввиду малых размеров поперечных сечений струйки скорости всех точек одного и того же поперечного сечения можно предположить одинаковыми и, следовательно, сечения *1'* и *2'*, так же как исходные, будут плоскими сечениями. Обозначим скорость сечения *1* через v_1, площадь его — через σ_1, а скорость и площадь сечения *2* — теми же соответственно буквами с индексами *2*; тогда объем *11'* запишется в виде $v_1\,dt\sigma_1$, а объем *22'* — в виде $v_2\Delta t\sigma_2$. Изменение массы будет равно

$$\Delta M=\rho_{2\text{ср}}v_2\sigma_2\Delta t-\rho_{1\text{ср}}v_1\sigma_1\Delta t.$$

Деля на Δt и устремляя его к нулю, получим уравнение неразрывности движения для элементарной струйки:

$$\frac{dM}{dt}=\rho_2v_2\sigma_2-\rho_1v_1\sigma_1=0,$$

где ρ_2 и ρ_1 означают плотности соответственно в сечениях *2* и *1*. Последнее уравнение можно также записать в виде

$$\rho_1v_1\sigma_1=\rho_2v_2\sigma_2, \tag{2.6}$$

или, поскольку сечения *1* и *2* были взяты произвольно, то

$$\rho v\sigma=\text{const} \tag{2.7}$$

во всех сечениях данной элементарной струйки, или, что все равно,

$$d(\rho v\sigma) = 0 \tag{2.8}$$

для каждой элементарной струйки.

Уравнение (2.6) (или эквивалентные ему (2.7) и (2.8)) называется уравнением расхода для элементарной струйки. Если представить себе, что поперечное сечение струйки неподвижно, а жидкость течет сквозь него, то произведение $\rho v\sigma$ можно рассматривать как массу жидкости, протекающую через сечение в единицу времени. Эта величина называется массовым расходом жидкости через площадку σ и обозначается $Q_М$:

$$Q_М = \rho v\sigma.$$

Наряду с массовым расходом рассматривают также весовой расход, т. е. вес жидкости, протекающей сквозь сечение в единицу времени:

$$Q_b = \gamma v\sigma$$

и объемный расход

$$Q_0 = v\sigma.$$

Таким образом, в уравнениях (2.6) — (2.8) записано, что *при установившемся движении массовый расход есть величина постоянная для всех сечений данной элементарной струйки.* Отсюда и происходит название — *уравнение расхода.*

В частном случае, если жидкость несжимаема, $\rho_1 = \rho_2$, и уравнение расхода для элементарной струйки принимает вид

$$v_1\sigma_1 = v_2\sigma_2, \tag{2.9}$$

или

$$Q_0 = v\sigma = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

для всех сечений струйки. Отсюда следует, что если площадь поперечного сечения струйки увеличивается, то скорость течения во столько же раз уменьшается, и наоборот.

Необходимо, однако, иметь в виду, что это относится *только к несжимаемой жидкости.* В случае сжимаемой жидкости постоянство объемного расхода может и не иметь места; в этом случае могло бы, например, через сечение *1* втечь количество жидкости, по объему большее, нежели количество, вытекшее за то же время через сечение *2*; это не нарушило бы закона сохранения массы, так как при этом увеличилась бы плотность жидкости между сечениями *1* и *2*.

Наличие в уравнениях (2.6) — (2.8) переменной плотности может коренным образом изменить соотношение между скоростью и площадью поперечного сечения струйки. В частности, как увидим в дальнейшем (§ 8 настоящей главы), при больших (сверхзвуковых) скоростях движения газа увеличение площади поперечного сечения струйки сопровождается увеличением скорости (а не уменьшением ее, как в случае несжимаемой жидкости); наоборот, сжатие струйки влечет за собой при определенных условиях уменьшение скорости. В первом случае увеличение σ и v компенсируется уменьшением плотности, во втором случае уменьшение σ и v — соответственным увеличением плотности.

Из уравнения расхода вытекают интересные следствия относительно формы струйки. Именно, из уравнения расхода следует, что свободный конец струйки не может находиться внутри жидкости. В самом деле, струйка не может закончиться внутри жидкости сечением конечного размера, так как это противоречило бы предположению о непрерывном распределении скоростей в жидкой среде; она не может также сойти на нет в форме острия, так как в конечной точке острия, по уравнению расхода, получились бы бесконечно большие плотность или скорость частиц, что физически невозможно. Таким образом, *струйка не может иметь внутри жидкости ни начала, ни конца; она должна, следовательно, иметь начало и конец на свободных границах жидкости или быть замкнутой.* Если, например, жидкость перетекает из одного сосуда в другой, то начало всех струек находится на поверхности уровня в том сосуде, из которого жидкость вытекает, а конец — на поверхности уровня в том сосуде, в который она втекает. Если же, например, привести жидкость, находящуюся в сосуде, во вращательное движение, то струйки будут замкнутыми.

§ 3. Уравнение неразрывности движения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат

Далеко не всегда бывает известна форма струек в потоке. Поэтому при применении уравнения неразрывности движения часто приходится выделять объем V не так, как это было сделано в предыдущем параграфе, а в соответствии с той системой координат, к которой отнесено движение жидкости.

Уравнение (2.1) выведено безотносительно к системе координат и пригодно поэтому для любой системы. Наиболее употребительной является декартова прямоугольная система, и мы выведем сначала уравнение неразрывности для этой системы.

Выделим в жидкой среде элементарный объем V. Вообще, в любой системе координат элементарный объем выделяется путем придания координатам произвольно выбранной начальной точки M_0 элементарных приращений, через крайние точки которых проводятся затем координатные поверхности.

Поступая так в данном случае, дадим декартовым координатам x, y, z произвольно выбранной, движущейся точки M_0 малые приращения, которые обозначим соответственно через Δx, Δy, Δz; проводя через крайние точки этих отрезков координатные плоскости, выделим элементарный движущийся объем, который, очевидно, будет иметь