ее, как в случае несжимаемой жидкости); наоборот, сжатие струйки влечет за собой при определенных условиях уменьшение скорости. В первом случае увеличение σ и v компенсируется уменьшением плотности, во втором случае уменьшение σ и v — соответственным увеличением плотности.

Из уравнения расхода вытекают интересные следствия относительно формы струйки. Именно, из уравнения расхода следует, что свободный конец струйки не может находиться внутри жидкости. В самом деле, струйка не может закончиться внутри жидкости сечением конечного размера, так как это противоречило бы предположению о непрерывном распределении скоростей в жидкой среде; она не может также сойти на нет в форме острия, так как в конечной точке острия, по уравнению расхода, получились бы бесконечно большие плотность или скорость частиц, что физически невозможно. Таким образом, *струйка не может иметь внутри жидкости ни начала, ни конца; она должна, следовательно, иметь начало и конец на свободных границах жидкости или быть замкнутой.* Если, например, жидкость перетекает из одного сосуда в другой, то начало всех струек находится на поверхности уровня в том сосуде, из которого жидкость вытекает, а конец — на поверхности уровня в том сосуде, в который она втекает. Если же, например, привести жидкость, находящуюся в сосуде, во вращательное движение, то струйки будут замкнутыми.

§ 3. Уравнение неразрывности движения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат

Далеко не всегда бывает известна форма струек в потоке. Поэтому при применении уравнения неразрывности движения часто приходится выделять объем V не так, как это было сделано в предыдущем параграфе, а в соответствии с той системой координат, к которой отнесено движение жидкости.

Уравнение (2.1) выведено безотносительно к системе координат и пригодно поэтому для любой системы. Наиболее употребительной является декартова прямоугольная система, и мы выведем сначала уравнение неразрывности для этой системы.

Выделим в жидкой среде элементарный объем V. Вообще, в любой системе координат элементарный объем выделяется путем придания координатам произвольно выбранной начальной точки M_0 элементарных приращений, через крайние точки которых проводятся затем координатные поверхности.

Поступая так в данном случае, дадим декартовым координатам x, y, z произвольно выбранной, движущейся точки M_0 малые приращения, которые обозначим соответственно через Δx, Δy, Δz; проводя через крайние точки этих отрезков координатные плоскости, выделим элементарный движущийся объем, который, очевидно, будет иметь форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.4). Вычислим для выделенного таким образом элементарного объема величину $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$, а затем предел этой величины: $\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$. Изменение ΔV выделенного объема происходит вследствие того, что в данный момент времени разные точки его имеют разные скорости, так как *вообще в жидкости скорость есть функция координат точки и времени.* Если мы обозначим скорость в точке M_0 через $\boldsymbol{v}$, а ее составляющие по осям координат соответственно через v_x, v_y, v_z, то, например, в точке M_1 скорость будет, вообще говоря, равна $\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$, а ее составляющие по осям координат: $v_x+\Delta v_x$, $v_y+\Delta v_y$, $v_z+\Delta v_z$. Изменение объема элемента будет происходить только от составляющих скорости, перпендикулярных к соответствующим граням. Например, от движения правой грани элемента произойдет за время Δt приращение объема, равное $(v_x+\Delta v_x)\,\Delta t\Delta y\Delta z$ (в связи с малыми размерами грани мы приближенно считаем скорость во всех ее точках равной скорости в точке M_1). Аналогично от движения левой грани произойдет за то же время Δt уменьшение (при положительном v_x) первоначально выделенного объема, равное $v_x\Delta t\Delta y\Delta z$. Изменение объема за время Δt от движения левой и правой граней равно

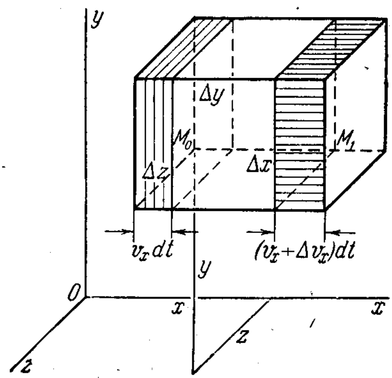

Рис. 2.4. К выводу уравнения неразрывности движения в прямоугольной системе координат.

$$(v_x+\Delta v_x)\,\Delta t\Delta y\Delta z - v_x\Delta t\Delta y\Delta z = \Delta v_x\Delta t\Delta y\Delta z.$$

Аналогично найдем, что от движения нижней и верхней граней произойдет изменение объема, равное $\Delta v_y\Delta t\Delta x\Delta z$, а от движения задней и передней граней — изменение объема, равное $\Delta v_z\Delta t\Delta x\Delta y$. Полное изменение объема за время Δt равно

$$\Delta V = (\Delta v_x\Delta y\Delta z + \Delta v_y\Delta x\Delta z + \Delta v_z\Delta x\Delta y)\,\Delta t.$$

Так как первоначально выделенный объем равен $V=\Delta x\Delta y\Delta z$, то скорость относительной объемной деформации получается равной

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\Delta v_x}{\Delta x}+\frac{\Delta v_y}{\Delta y}+\frac{\Delta v_z}{\Delta z}.$$

Это выражение, как уже указывалось, приближенное, так как при его выводе предполагалось, что во всех точках каждой грани нормальная к ней составляющая скорости есть величина постоянная; кроме того, оно относится к элементу, имеющему малые, но произвольные размеры Δx, Δy, Δz. Чем меньше эти размеры, тем ближе к действительности предположение о том, что во всех точках одной и той же грани скорость имеет одинаковую величину. В пределе при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ мы получим точное выражение для скорости относительной объемной деформации в точке M_0, и это выражение не будет зависеть от произвольно взятых размеров исходного параллелепипеда:

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta z} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

При переходе к пределу мы получили здесь частные производные потому, что каждое приращение скорости происходило только от изменения одной переменной при постоянных значениях всех остальных переменных; так, например, Δv_x есть приращение составляющей v_x при переходе от точки M_0 к точке M_1; здесь переменная x получила приращение Δx, все же остальные переменные y, z и t оставались при этом без изменений.

Подставляя последнее выражение для скорости объемной деформации в общее уравнение (2.1), получим уравнение неразрывности движения в декартовой прямоугольный системе координат:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{2.11}$$

В случае, если жидкость несжимаема, $\rho = \text{const}$, и это уравнение примет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{2.12}$$

Следует здесь обратить внимание на то, что в то время, как в уравнении расхода мы имели связь между скоростями в разных местах потока, в этих уравнениях производные от v_x, v_y, v_z относятся к одной и той же точке среды. Таким образом, оказываются связанными между собой по закону сохранения массы не только скорости жидкости в разных местах потока, но и составляющие скорости в одной и той же точке. Поэтому хотя частицы несжимаемой жидкости значительно более подвижны, нежели частицы, например, упругих тел, их передвижения все же не могут быть вполне произвольны, так как составляющие скорости должны удовлетворять уравнению (2.12).

В уравнение (2.11) входят как частные производные, так и обыкновенные. Для вычислений удобнее, чтобы в уравнении были производные только одного вида, в данном случае частные. Для того чтобы вычислить $d\rho/dt$, вспомним, что $\rho = f(x, y, z, t)$, а при движении частицы ее координаты x, y, z в свою очередь являются функциями времени t. По правилу дифференцирования функции от функции получаем:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

и так как

$$\frac{dx}{dt}=v_x, \qquad \frac{dy}{dt}=v_y, \qquad \frac{dz}{dt}=v_z,$$

то

$$\frac{d\rho}{dt}=v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Уравнение (2.11) теперь приобретает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0,$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0. \tag{2.13}$$

В дальнейшем нам придется, кроме декартовой системы координат, применять в отдельных вопросах иные системы; наиболее часто будет встречаться так называемая цилиндрическая система координат. Напомним вкратце эту систему. Выбирается координатная ось и координатная плоскость, проходящая через эту ось. Положение точки M в пространстве определяется углом θ (рис. 2.5), который образует координатная плоскость с плоскостью, проведенной через точку M и ось координат (Ox), и декартовыми координатами x и r точки во второй из упомянутых плоскостей.

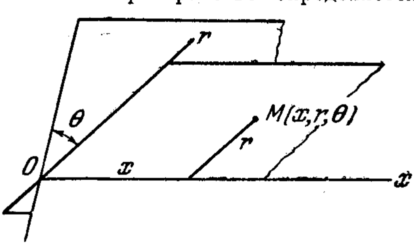

Рис. 2.5. Цилиндрическая система координат.

Выведем уравнение неразрывности для этой системы координат. Этот вывод можно провести двояко. Можно составить формулы перехода от декартовой системы координат к цилиндрической и произвести в уравнении (2.11) замену переменных. Можно непосредственно вывести выражение скорости объемной деформации для цилиндрической системы координат, выделив элемент жидкости и ведя вычисление тем же путем, что и для декартовой системы координат. Мы предпочтем второй способ, так как первый является чисто формальным.

Возьмем точку M_0 с координатами x, r, θ и, дав этим координатам приращения Δx, Δr, $\Delta\theta$, выделим соответствующими координатными поверхностями элементарный движущийся объем жидкости; он будет иметь вид, показанный на рис. 2.6. Изменение этого объема за время Δt, происходящее от движения передней и задней граней, равно $\Delta v_x r\Delta\theta\Delta r\Delta t$; за то же время от движения левой и правой граней произойдет изменение объема, равное $\Delta v_\theta\Delta x\Delta r\Delta t$, где через v_θ обозначена составляющая скорости вдоль направления, перпендикулярного к плоскости (x, r). От движения нижней грани объем элемента изменится на величину $v_r\Delta x r\Delta\theta\Delta t$, а от движения верхней — на величину $(v_r+\Delta v_r)\Delta x(r+\Delta r)\Delta\theta\Delta t$. Таким образом, скорость объемной деформации элемента равна

$$\frac{dV}{dt}=\Delta v_x r\Delta\theta\Delta r+\Delta v_\theta\Delta x\Delta r+\Delta v_r\Delta x r\Delta\theta+v_r\Delta x\Delta r\Delta\theta+\Delta v_r\Delta x\Delta r\Delta\theta.$$

Разделим это равенство почленно на объем элемента

$$V = r\Delta\theta\Delta x\Delta r;$$

тогда получим:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{1}{r}\frac{\Delta v_\theta}{\Delta \theta} + \frac{\Delta v_r}{\Delta r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\Delta v_r}{r}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta r \to 0$, $\Delta\theta \to 0$ и учитывая, что

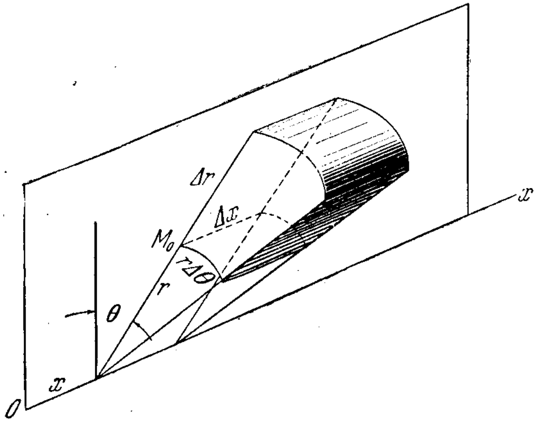

Рис. 2.6. К выводу уравнения неразрывности движения в цилиндрической системе координат.

последнее слагаемое стремится при этом к нулю, будем иметь:

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (2.1), получим уравнение неразрывности движения в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{2.14}$$

Если $\frac{d\rho}{dt}$ выразить через частные производные аналогично тому, как это было сделано для прямоугольной системы координат, то будем иметь:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta},$$

и уравнение неразрывности движения в цилиндрической системе координат примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\rho v_r}{r} = 0. \tag{2.15}$$

В частном случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и тогда получаем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{2.16}$$

В дальнейшем придется применять также сферическую систему координат; выведем уравнение неразрывности движения и для этой системы.

Напомним, что в сферической системе координат выбирается плоскость и лежащая в этой плоскости ось; через данную точку M_0 в пространстве и ось проводится плоскость, и положение точки определяется углом ϑ между координатной плоскостью и плоскостью, проходящей через данную точку, и полярными координатами r и θ точки в этой плоскости (рис. 2.7).

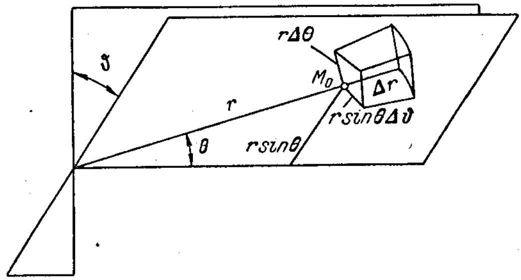

Рис. 2.7. Сферическая система координат и элементарный объем, соответствующий этой системе.

Придавая координатам r, θ, ϑ малые приращения Δr, $\Delta\vartheta$, $\Delta\theta$, получим элементарный объем, соответствующий сферической системе координат. Изменение этого объема за время Δt, происходящее от перемещений задней и передней граней, равно $\Delta v_\vartheta r\Delta\theta\Delta r\Delta t$, где v_ϑ есть компонента скорости, перпендикулярная к плоскости, проходящей через точку M_0 и координатную ось. За то же время от перемещения нижней грани произойдет изменение объема, равное $v_\theta\Delta r r\sin\theta\Delta\vartheta\Delta t$, и от перемещения верхней — изменение объема, равное $(v_\theta+\Delta v_\theta) r\sin(\theta+\Delta\theta)\Delta r\Delta\vartheta\Delta t$, где v_θ есть компонента скорости, перпендикулярная к радиусу — вектору r и лежащая в плоскости, проходящей через координатную ось. Обе эти грани дадут изменение объема, которое с точностью до малых величин более высокого порядка, чем четвертый, можно записать в виде $\Delta(v_\theta\sin\theta) r\Delta r\Delta\vartheta\Delta t$. От перемещения левой грани выделенный объем изменится на величину $v_r r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\vartheta\Delta t$, а от перемещения правой — на величину $(v_r+\Delta v_r)(r+\Delta r)^2\sin\theta\Delta\vartheta\Delta\theta\Delta t$, так, что в результате от перемещения этих двух граней получается изменение объема, равное с точностью до малых более высокого порядка, чем четвертый, $\Delta(v_r r^2)\sin\theta\Delta\vartheta\Delta\theta\Delta t$. Скорость объемной деформации элемента будет, таким образом, равна

$$\frac{dV}{dt}=\Delta v_\vartheta r\Delta\theta\Delta r+\Delta(v_\theta\sin\theta) r\Delta r\Delta\vartheta+\Delta(v_r r^2)\sin\theta\Delta\vartheta\Delta\theta.$$

Деля почленно это равенство на объем элемента $V=r\Delta\theta\cdot r\sin\theta\Delta\vartheta\Delta r$ и переходя к пределу при $\Delta\theta\to 0$, $\Delta\vartheta\to 0$ и $\Delta r\to 0$, будем иметь:

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_\theta r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (2.1), получим уравнение неразрывности движения в сферической системе координат:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}=0.$$

Если выразить $d\rho/dt$ через частные производные от ρ по координатам, то будем иметь:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial r}v_r+\frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}\frac{v_\vartheta}{r\sin\theta}+\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{v_\theta}{r},$$

и уравнение неразрывности движения примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}=0.$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$) получаем:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}=0.$$

§ 4. Закон сохранения энергии. Уравнение энергии в дифференциальной форме для элементарной струйки

Выделим мысленно в жидкой среде элементарный объем и сформулируем для него закон сохранения энергии. Рассматривая выделенный элемент изолированно от окружающей среды, мы должны представить себе, что воздействие среды заменено соответствующими поверхностными силами. При движении элемента работа этих сил будет изменять его энергию. Элемент может также получать тепловую энергию из окружающей среды или расходовать ее в окружающую среду.

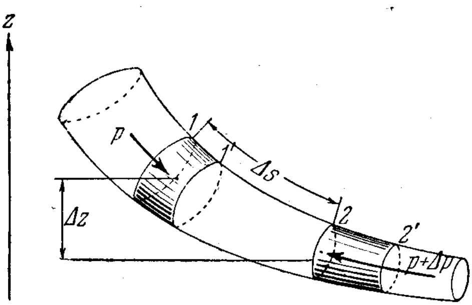

Рис. 2.8. К выводу уравнения энергии.

Мы сформулируем закон сохранения энергии следующим образом: *изменение энергии выделенного элемента за некоторый промежуток времени Δt равно количеству тепла, сообщенному элементу за то же время, сложенному с работой, которую произвели за то же время приложенные к элементу внешние силы.*

Возьмем струйку в потоке жидкости (сжимаемой или несжимаемой, безразлично) и проведем в струйке два близких друг к другу поперечных сечения *1* и *2* (расстояние между ними вдоль струйки обозначим через Δs). Этими поперечными сечениями и боковой поверхностью струйки между сечениями выделится жидкий объем, к которому мы и применим закон сохранения энергии. Будем предполагать при этом, что движение жидкости является установившимся, т. е. таким, что в каждой данной точке скорости частиц, плотность, температура, нормальные и касательные напряжения с течением времени не изменяются и зависят только от дуги s.

Пусть выделенный в струйке элемент за время Δt переместится из положения *12* в положение *1'2'* (рис. 2.8). Так как движение является установившимся, то в общей части обоих положений объема (*1'2*) изменение скорости и энергии равно нулю. Можно поэтому