и уравнение неразрывности движения примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}=0.$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$) получаем:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}=0.$$

§ 4. Закон сохранения энергии. Уравнение энергии в дифференциальной форме для элементарной струйки

Выделим мысленно в жидкой среде элементарный объем и сформулируем для него закон сохранения энергии. Рассматривая выделенный элемент изолированно от окружающей среды, мы должны представить себе, что воздействие среды заменено соответствующими поверхностными силами. При движении элемента работа этих сил будет изменять его энергию. Элемент может также получать тепловую энергию из окружающей среды или расходовать ее в окружающую среду.

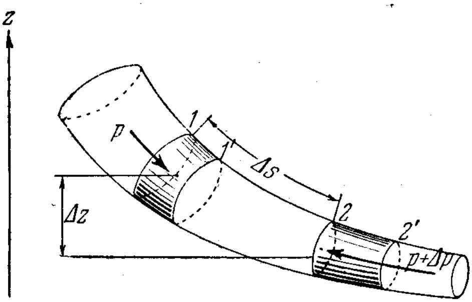

Рис. 2.8. К выводу уравнения энергии.

Мы сформулируем закон сохранения энергии следующим образом: *изменение энергии выделенного элемента за некоторый промежуток времени Δt равно количеству тепла, сообщенному элементу за то же время, сложенному с работой, которую произвели за то же время приложенные к элементу внешние силы.*

Возьмем струйку в потоке жидкости (сжимаемой или несжимаемой, безразлично) и проведем в струйке два близких друг к другу поперечных сечения *1* и *2* (расстояние между ними вдоль струйки обозначим через Δs). Этими поперечными сечениями и боковой поверхностью струйки между сечениями выделится жидкий объем, к которому мы и применим закон сохранения энергии. Будем предполагать при этом, что движение жидкости является установившимся, т. е. таким, что в каждой данной точке скорости частиц, плотность, температура, нормальные и касательные напряжения с течением времени не изменяются и зависят только от дуги s.

Пусть выделенный в струйке элемент за время Δt переместится из положения *12* в положение *1'2'* (рис. 2.8). Так как движение является установившимся, то в общей части обоих положений объема *(1'2)* изменение скорости и энергии равно нулю. Можно поэтому при вычислении изменения энергии рассматривать второе положение $1'2'$ элемента на струйке как результат переноса части его $11'$ в положение $22'$.

Кинетическая энергия элемента $11'$ может быть записана в виде $\rho\Delta V v^2/2$, где ΔV есть объем этого элемента, а v — его скорость. Так как при всех перемещениях элемента масса его $\rho\Delta V$ остается постоянной (по закону сохранения массы), то оказывается удобным вычислять энергию и работу, отнесенную к единице массы элемента. Кинетическая энергия единицы массы элемента равна $v^2/2$, а ее изменение можно записать в виде $\Delta(v^2)/2$. Заметим, что при подсчете изменения кинетической энергии ввиду малости элемента $11'$ можно считать скорости всех его частиц одинаковыми; учет их изменения в пределах элемента дал бы здесь слагаемые более высокого порядка малости, нежели все остальные.

Изменение потенциальной энергии элемента $11'$ (т. е. энергии, происходящей от расположения элемента в поле земного тяготения) равно $\rho\Delta V g\Delta z$, где Δz есть вертикальное перемещение центра тяжести $11'$, которое считается положительным при перемещении снизу вверх; будучи отнесенным к единице массы, изменение потенциальной энергии запишется в виде $g\Delta z$.

Наличие молекулярного и внутримолекулярного движения обусловливает внутреннюю энергию жидкости или газа. Относительное расположение молекул и атомов в поле сил взаимного притяжения и отталкивания определяет внутреннюю потенциальную энергию жидкости или газа. Внутренняя энергия, как известно из термодинамики, есть функция состояния газа и, следовательно, зависит от температуры газа и давления, под которым он находится. Обозначим изменение внутренней энергии элемента $11'$, отнесенное к единице массы, через ΔU.

Перейдем к вычислению работы поверхностных сил, заменяющих воздействие окружающей среды. Работа нормальных напряжений, приложенных к боковой поверхности элемента, равна нулю, так как эти напряжения все время перпендикулярны к направлениям перемещений соответствующих частиц; поэтому следует подсчитать лишь работу нормальных напряжений, приложенных к основаниям. Обозначим давление в сечении 1 через p, скорость жидкости через v и площадь сечения через σ; те же величины для сечения 2 будут соответственно равны $p+\Delta p$, $v+\Delta v$, $\sigma+\Delta\sigma$, при этом $p+\Delta p$ будет направлено в сторону, противоположную направлению p, так как выделенный в жидкой среде элемент должен находиться, вообще говоря, в сжатом состоянии. Работа давлений, приложенных к основаниям элемента, равна

$$p\sigma v\Delta t-(p+\Delta p)(\sigma+\Delta\sigma)(v+\Delta v)\Delta t.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемыми, содержащими произведения малых величин, по сравнению со слагаемыми, которые не содержат таких произведений, получим, что работа давлений равна

$$-(pv\Delta\sigma + v\sigma\Delta p + p\sigma\Delta v)\,\Delta t = -\Delta(p\sigma v)\,\Delta t = \\ = -\Delta(p\Delta V) = -\Delta\left(\frac{p}{\rho}\Delta M\right),$$

где ΔV — объем элемента $11'$, равный $\sigma v\Delta t$, а ΔM — его масса, равная $\rho\Delta V$. Работа давлений, отнесенная к единице массы, отсюда получается равной $-\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right)$.

Обозначим работу напряжений, происходящих от вязкости (в том числе касательных напряжений), отнесенную к единице массы, через $-\Delta K$, а полученное элементом на единицу массы внешнее тепло через ΔQ.

Запишем теперь закон сохранения энергии в указанной выше формулировке: изменение энергии элемента, отнесенное к единице массы, равно полученному элементом количеству тепла, сложенному с работой внешних сил:

$$\Delta U + \frac{1}{2}\Delta(v^2) + g\Delta z = \Delta Q - \Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) - \Delta K.$$

Последнее уравнение написано для элемента струйки, имеющего малую, но конечную длину Δs; это уравнение приближенное, так как при подсчете работы давлений мы пренебрегаем малыми величинами более высокого, нежели первый, порядка малости. Для того чтобы получить точное уравнение, не зависящее от произвольной величины Δs, мы разделим почленно последнее уравнение на Δs и перейдем к пределу при $\Delta s \to 0$. При этом предположим, что течение одномерно, т. е. K и Q зависят только от s. В пределе получим уравнение, в котором все величины относятся уже не к объему, а к некоторому сечению струйки:

$$\frac{dU}{ds} + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + g\frac{dz}{ds} + \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{ds} + \frac{dK}{ds} = \frac{dQ}{ds},$$

или

$$dU + \frac{1}{2}dv^2 + gdz + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + dK = dQ. \qquad (2.17)$$

Мы будем называть это уравнение *уравнением энергии в дифференциальной форме*. Частный случай этого уравнения был выведен Д. Бернулли в 1738 г. применением теоремы живых сил. Уравнение энергии является одним из основных уравнений аэродинамики. Широкая область его применения обусловлена тем, что для весьма общего класса случаев, именно для установившегося движения, оно связывает такие важнейшие величины, как скорость жидкости, ее плотность, давление в данной точке, высоту расположения данной точки, внутреннюю и полученную энергию и др., которые встречаются во всякой аэрогидродинамической задаче. Мы рассмотрим теперь некоторые наиболее важные частные случаи уравнения (2.17) и перейдем от дифференциальной формы этого уравнения к конечной форме.

§ 5. Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости

Рассмотрим один из наиболее простых частных случаев уравнения (2.17). Допустим, что жидкость несжимаема и имеет во всех своих точках одну и ту же температуру; тогда $\rho = \text{const}$. Кроме того, предположим, что в жидкости отсутствуют силы трения, т. е. что жидкость идеальна. Предположим далее, что отсутствует теплообмен между выделенной струйкой и окружающей средой. При этих предположениях уравнение (2.17) значительно упрощается. Так как жидкость идеальная, то работа напряжений, происходящих от вязкости, dK равна нулю; правая часть уравнения также равна нулю. В несжимаемой жидкости внутренняя энергия определяется количеством подведенного тепла, но так как $dQ=0$, то $dU=0$. Умножив уравнение (2.17) почленно на ρ, получим для рассматриваемого частного случая следующее равенство:

$$\frac{\rho}{2}\,dv^2 + \gamma\,dz + dp = 0.$$

Интегрируя это уравнение вдоль выделенной струйки, находим:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = \text{const}. \tag{2.18}$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли для струйки идеальной несжимаемой жидкости.* Если взять в одной и той же струйке два произвольных сечения *1* и *2* и отметить значками 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к первому или второму сечениям, то уравнение Бернулли можно записать в виде

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \gamma z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \gamma z_2. \tag{2.19}$$

Трехчлен $p + \rho v^2/2 + \gamma z$ имеет простой физический смысл. Первое слагаемое можно рассматривать как потенциальную энергию давления, приходящуюся на единицу объема, $\rho v^2/2$ — как кинетическую энергию того же объема и γz — как потенциальную энергию того же объема, происходящую от земного притяжения. Сумма этих величин представляет собой полную (внешнюю) механическую энергию единицы объема жидкости (величина внутренней энергии в эту сумму не входит). В уравнении (2.18) записано, таким образом, что *при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма кинетической и потенциальной энергий единицы объема есть величина постоянная*