треннюю и полученную энергию и др., которые встречаются во всякой аэрогидродинамической задаче. Мы рассмотрим теперь некоторые наиболее важные частные случаи уравнения (2.17) и перейдем от дифференциальной формы этого уравнения к конечной форме.

§ 5. Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости

Рассмотрим один из наиболее простых частных случаев уравнения (2.17). Допустим, что жидкость несжимаема и имеет во всех своих точках одну и ту же температуру; тогда $\rho = \text{const}$. Кроме того, предположим, что в жидкости отсутствуют силы трения, т. е. что жидкость идеальна. Предположим далее, что отсутствует теплообмен между выделенной струйкой и окружающей средой. При этих предположениях уравнение (2.17) значительно упрощается. Так как жидкость идеальная, то работа напряжений, происходящих от вязкости, dK равна нулю; правая часть уравнения также равна нулю. В несжимаемой жидкости внутренняя энергия определяется количеством подведенного тепла, но так как $dQ = 0$, то $dU = 0$. Умножив уравнение (2.17) почленно на ρ, получим для рассматриваемого частного случая следующее равенство:

$$\frac{\rho}{2}\,dv^2 + \gamma\,dz + dp = 0.$$

Интегрируя это уравнение вдоль выделенной струйки, находим:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = \text{const}. \tag{2.18}$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли для струйки идеальной несжимаемой жидкости*. Если взять в одной и той же струйке два произвольных сечения *1* и *2* и отметить значками 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к первому или второму сечениям, то уравнение Бернулли можно записать в виде

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \gamma z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \gamma z_2. \tag{2.19}$$

Трехчлен $p + \rho v^2/2 + \gamma z$ имеет простой физический смысл. Первое слагаемое можно рассматривать как потенциальную энергию давления, приходящуюся на единицу объема, $\rho v^2/2$ — как кинетическую энергию того же объема и γz — как потенциальную энергию того же объема, происходящую от земного притяжения. Сумма этих величин представляет собой полную (внешнюю) механическую энергию единицы объема жидкости (величина внутренней энергии в эту сумму не входит). В уравнении (2.18) записано, таким образом, что *при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма кинетической и потенциальной энергий единицы объема есть величина постоянная* *во всех сечениях одной и той же струйки.* Для разных струек полная энергия единицы объема может быть разной.

Размерность каждого слагаемого в уравнении (2.18) одинакова с размерностью давления; поэтому не только p, но и другие слагаемые в этом уравнении очень часто называют условно «давлениями» с прибавлением соответствующих прилагательных.

Давление p называют аэродинамическим давлением или, еще иначе, в связи с названиями других слагаемых в этом уравнении, *статическим давлением.* Слагаемое $\rho v^2/2$ называют *скоростным* или, иначе, *динамическим «давлением»* и слагаемое γz — *весовым «давлением».* Происхождение всех этих названий будет выяснено в дальнейшем. Но следует сразу же отметить, во избежание путаницы в столь важных понятиях, что действительным давлением, в физическом смысле этого слова, является *только статическое* или, иначе, *аэродинамическое давление.*

В самом деле, на любую площадку ΔS, находящуюся на поверхности выделенного в жидкости объема, действует, как мы знаем, поверхностная сила $\Delta \boldsymbol{R}$, характеризуемая своим нормальным напряжением $\boldsymbol{p}$ и касательным $\boldsymbol{\tau}$. Никаких других сил, с которыми среда воздействовала бы на площадку ΔS, очевидно, не существует, так что ни $\rho v^2/2$, ни γz не представляют собой реально действующих в жидкости сил, и эти выражения лишь условно можно называть «давлениями».

Хотя мы в дальнейшем будем опускать в слове «давление», употребляемом в этом смысле, кавычки, но нельзя забывать об условности этого названия и не следует связывать с этим названием физического представления о давлении.

Если воспользоваться названиями отдельных слагаемых уравнения Бернулли, то закон, выражаемый уравнением (2.18), можно сформулировать так: *при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма статического, динамического и весового давлений есть величина постоянная во всех сечениях одной и той же струйки.*

Уравнение Бернулли применяют еще в ином виде, который получается из (2.18) или (2.19) почленным делением на $\gamma = \rho g$:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2. \tag{2.20}$$

В этой последней форме уравнения Бернулли все слагаемые имеют размерность длины и называются «высотами» или «напорами»: p/γ называется *статической*, или *пьезометрической, «высотой»*, $v^2/2g$ — *динамической «высотой»*, или *динамическим «напором»*, z — *геометрической*, или *нивелирной, высотой.* Сумма трех высот или напоров обычно называется *полным напором* в данном сечении струйки. Уравнение Бернулли в его последней записи можно словесно выразить так: *полный напор при установившемся движении идеальной* *несжимаемой жидкости есть величина постоянная во всех сечениях одной и той же струйки.*

С энергетической точки зрения полный напор можно рассматривать как величину внешней механической энергии единицы веса жидкости, а каждое слагаемое в уравнении (2.20) — как величину соответственно кинетической или потенциальной энергии (того или иного вида), которой обладает единица веса жидкости.

В случае несжимаемой жидкости как вес, так и объем ее сохраняются во все время движения и уравнения (2.19) и (2.20) совершенно эквивалентны друг другу. Но в сжимаемой среде объем не сохраняется, тогда как масса (или, вес) есть величина постоянная во все время движения. Поэтому для сжимаемой среды уравнение энергии должно быть написано для единицы массы или веса.

Из уравнения Бернулли следует, что, если энергия одного вида, например кинетическая, вдоль струйки нарастает, то энергия другого вида, т. е. потенциальная, настолько же убывает, и наоборот. Более подробно мы увидим это на следующих примерах.

§ 6. Примеры применения уравнения Бернулли. Пределы его применения

Рассмотрим применение уравнения Бернулли на нескольких примерах.

1. Скорость истечения жидкости из отверстия в резервуаре. Представим себе, что в резервуаре находится жидкость, которую можно считать несжимаемой. В стенке (или в дне) резервуара имеется небольшое отверстие с острыми кромками, расположенное на глубине H под свободной поверхностью жидкости (рис. 2.9). Через отверстие струя жидкости вытекает из резервуара наружу. Задача заключается в том, чтобы определить скорость истечения струи. Обозначим давление над свободной поверхностью жидкости в резервуаре через p, а давление в окружающей резервуар атмосфере через p_0. Предположим, что уровень жидкости в резервуаре поддерживается на одной высоте ($H = \text{const}$); при большой площади горизонтального сечения резервуара (по сравнению с площадью отверстия) можно считать, что $H = \text{const}$ в течение некоторого промежутка времени даже без добавления жидкости в резервуар. Если $H = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то движение будет установившимся, как это и требуется для применения уравнения Бернулли.

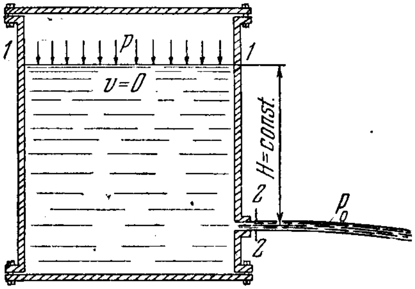

Рис. 2.9. К определению скорости истечения жидкости из отверстия в резервуаре.