несжимаемой жидкости есть величина постоянная во всех сечениях одной и той же струйки.

С энергетической точки зрения полный напор можно рассматривать как величину внешней механической энергии единицы веса жидкости, а каждое слагаемое в уравнении (2.20) — как величину соответственно кинетической или потенциальной энергии (того или иного вида), которой обладает единица веса жидкости.

В случае несжимаемой жидкости как вес, так и объем ее сохраняются во все время движения и уравнения (2.19) и (2.20) совершенно эквивалентны друг другу. Но в сжимаемой среде объем не сохраняется, тогда как масса (или, вес) есть величина постоянная во все время движения. Поэтому для сжимаемой среды уравнение энергии должно быть написано для единицы массы или веса.

Из уравнения Бернулли следует, что, если энергия одного вида, например кинетическая, вдоль струйки нарастает, то энергия другого вида, т. е. потенциальная, настолько же убывает, и наоборот. Более подробно мы увидим это на следующих примерах.

§ 6. Примеры применения уравнения Бернулли. Пределы его применения

Рассмотрим применение уравнения Бернулли на нескольких примерах.

1. Скорость истечения жидкости из отверстия в резервуаре. Представим себе, что в резервуаре находится жидкость, которую можно считать несжимаемой. В стенке (или в дне) резервуара имеется небольшое отверстие с острыми кромками, расположенное на глубине H под свободной поверхностью жидкости (рис. 2.9). Через отверстие струя жидкости вытекает из резервуара наружу. Задача заключается в том, чтобы определить скорость истечения струи. Обозначим давление над свободной поверхностью жидкости в резервуаре через p, а давление в окружающей резервуар атмосфере через p_0. Предположим, что уровень жидкости в резервуаре поддерживается на одной высоте ($H = \text{const}$); при большой площади горизонтального сечения резервуара (по сравнению с площадью отверстия) можно считать, что $H = \text{const}$ в течение некоторого промежутка времени даже без добавления жидкости в резервуар. Если $H = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то движение будет установившимся, как это и требуется для применения уравнения Бернулли.

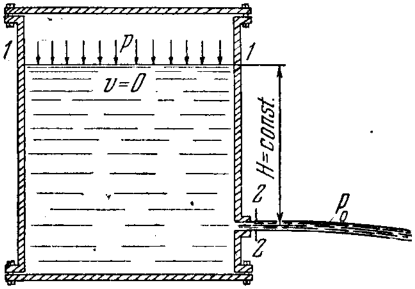

Рис. 2.9. К определению скорости истечения жидкости из отверстия в резервуаре.

Проведем в струйке два сечения: *11* — на свободной поверхности жидкости, *22* на некотором расстоянии от выхода из отверстия. В струе, вытекающей из отверстия, устанавливается на некотором расстоянии от выхода давление, приблизительно равное давлению в окружающей атмосфере. В первом сечении давление равно p, скорость можно считать равной нулю (так как $H = \text{const}$), высота z над плоскостью отсчета, за которую мы примем горизонтальную плоскость, проходящую через ось отверстия, равна H; во втором сечении $z = 0$, $p = p_0$, скорость v является искомой величиной. Запишем уравнение Бернулли для этих двух сечений:

$$p + \gamma H = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p - p_0}{\gamma}\right)}.$$

В частном случае, когда $p = p_0$, формула для скорости истечения жидкости принимает вид

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Эта формула выражает так называемую теорему Торичелли, установленную им в 1643 г., т. е. еще до того, как Д. Бернулли вывел свое уравнение. Скорость истечения жидкости зависит лишь от высоты, с которой жидкость опустилась, одинакова для всех жидкостей и равна скорости свободного падения тела с этой же высоты.

Действительная скорость истечения из отверстия с острыми кромками несколько меньше, чем получается по этой формуле. Дело в том, что как бы мало ни было отверстие, скорости в струе по сечению *22* распределены неравномерно. Действительная скорость истечения представляет собой некоторую среднюю скорость в сечении *22*; она меньше, нежели максимальная, определяемая предыдущей формулой. Кроме того, реальная жидкость обладает вязкостью; это обстоятельство также приводит к тому, что действительная скорость меньше, нежели скорость, определяемая последней формулой.

Для того чтобы учесть все это, вводят в формулу для v поправочный множитель φ, меньший единицы. Таким образом, действительная скорость истечения равна

$$v = \varphi\sqrt{2g\left(H + \frac{p - p_0}{\gamma}\right)}.$$

Коэффициент φ называется *коэффициентом скорости* при истечении и определяется экспериментальным путем; его численное значение для круглого отверстия $0{,}95 \div 0{,}99$.

2. Свободная поверхность жидкости в канале переменной ширины. Рассмотрим жидкость, протекающую по каналу, который имеет в каком-либо месте сужение, например, как показано на рис. 2.10, *а*. Определим высоту уровня жидкости в сжатом сечении.

Движение жидкости в канале и вообще в любом открытом русле обладает тем свойством, что на свободной поверхности вдоль всего потока давление во всех точках постоянно и равно атмосферному давлению ($p = p_0$). Такое движение жидкости называется *безнапорным*.

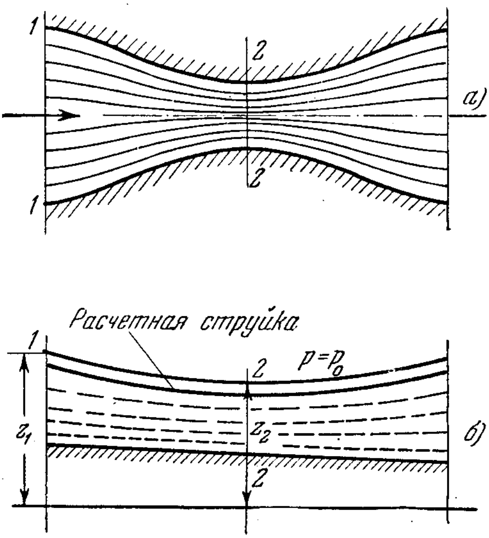

Рис. 2.10. Изменение высоты свободной поверхности жидкости при протекании через сужение в канале: *а*) вид канала в плане; *б*) продольный вертикальный разрез.

Для того чтобы вычислить высоту свободной поверхности в сжатом сечении, выделим на поверхности элементарную струйку, проведем в ней два поперечных сечения — одно до сжатия в канале, другое — в сжатом месте — и запишем для этой струйки уравнение Д. Бернулли. Так как $p = \text{const}$, то уравнение Бернулли имеет вид

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}.$$

По уравнению расхода жидкости

$$v_1\sigma_1 = v_2\sigma_2,$$

где σ_1 и σ_2 суть площади соответствующих сечений струйки. Предположим теперь, что эти площади находятся в таком же соотношении, как площади S_1 и S_2 соответствующих сечений всего потока:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{S_1}{S_2};$$

тогда из уравнения расхода получится:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

После подстановки в уравнение Бернулли находим:

$$z_2 = z_1 - \frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right).$$

Для того чтобы вычислить z_2, следует выразить S_1 и S_2 через размеры, характеризующие поперечное сечение канала, например, в случае прямоугольного поперечного сечения через ширину b и высоту z, отсчитываемую от дна канала:

$$S_1 = b_1z_1, \quad S_2 = b_2z_2.$$

Для z_2 тогда получится следующее кубическое уравнение:

$$z_2^3-\left(z_1+\frac{v_1^2}{2g}\right)z_2^2+\frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 z_1^2=0.$$

Для удобства анализа приведем это уравнение к безразмерному виду, разделив его почленно на z_1^3. Отношение z_2/z_1 обозначим через $\bar{z}_2$, а безразмерный параметр v_1^2/gz_1 через F_1 (эта величина называется числом Фруда). В результате уравнение примет вид

$$\bar{z}_2^2(1-\bar{z}_2)+\bar{z}_2^2\frac{\mathsf{F}_1}{2}=\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2\frac{\mathsf{F}_1}{2}.$$

Корни этого уравнения являются функцией двух параметров: b_1/b_2 и F_1.

Нетрудно убедиться, что при $\bar{z}_2=1$ $b_1/b_2=1$. Посмотрим, как изменится отношение b_1/b_2 при малом изменении $\bar{z}_2$. Полагая $\bar{z}_2=1+\delta$, где δ есть малая величина, и оставляя в уравнении для $\bar{z}_2$ лишь слагаемые, содержащие δ в степени не выше первой, находим:

$$\delta=\frac{\mathsf{F}_1}{2}\,\frac{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2-1}{\mathsf{F}_1-1}.$$

Отсюда следует, что если канал сужается, т. е. $b_1/b_2>1$, то при $\mathsf{F}_1>1$ величина δ будет положительной по знаку, что означает повышение уровня воды в узком сечении, и наоборот, при $\mathsf{F}_1<1$ уровень воды в узком сечении понизится. При расширении канала будет наблюдаться обратное явление.

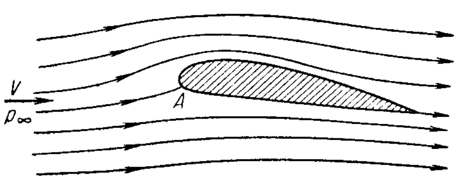

Рис. 2.11. При обтекании тела поток в носовой части разветвляется. Точка A является точкой торможения потока.

3. Давление в точке торможения потока. Представим себе твердое тело, обтекаемое потоком жидкости. На передней стороне тела всегда находится точка A, в которой струйка, набегающая на тело, разветвляется. Такая точка разветвления струй называется *критической точкой* или *точкой торможения потока* (рис. 2.11). Скорость в критической точке равна нулю. Вычислим давление в этой точке. Выделим для этого в потоке струйку, которая подходит к критической точке, и проведем два сечения: одно перед телом на большом расстоянии от него (теоретически говоря, в бесконечности), другое — в том месте, где находится критическая точка. Движение будем предполагать горизонтальным, т. е. $z=\text{const}$. Обозначим давление в первом сечении (на бесконечности) через p_∞ и скорость потока — через V_∞; давление во втором сечении (где $v=0$) — через p_0. По уравнению Бернулли получаем:

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}.$$

Давление в точке торможения потока несжимаемой жидкости равно сумме статического и динамического давлений в потоке. Эту сумму называют полным давлением.

Следует отметить, что в точке торможения давление достигает максимального возможного значения, так как по уравнению Бернулли в случае горизонтального движения $p+\rho v^2/2=\text{const}$, и следовательно, давление будет наибольшим в той точке, где скорость наименьшая; такой точкой является точка торможения, ибо в ней $v=0$.

Для расчетов пользуются обычно не абсолютным значением давления в данной точке, а разностью между давлением в данной точке и статическим давлением в потоке. Эту разность называют *избыточным давлением* в данной точке. В точке торможения избыточное давление равно динамическому давлению в потоке

$$p_0 - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2}.$$

Если взять для численного примера скорость потока воздуха $V_\infty = 100$ *м/сек*, плотность $\rho = 0{,}125$ *кг сек²/м⁴*, то избыточное давление на поверхность тела в точке торможения получается равным 625 *кг/м²*.

При применении уравнения Бернулли к вычислению давлений среды на поверхность тела необходимо иметь в виду следующее. Если тело движется относительно неподвижной системы координат (с постоянной по величине и направлению скоростью) в покоящейся среде, то применять уравнение Бернулли (2.18) непосредственно к движению среды, которое возникает от движения тела, нельзя (даже в том случае, если тело двигалось бесконечно долго). Дело в том, что движение среды в этой системе координат неустановившееся. Действительно, какую бы фиксированную точку в пространстве, занятом средой, мы ни взяли, с течением времени эта точка будет занимать разные положения по отношению к движущемуся телу и, следовательно, с течением времени будет изменяться и скорость жидкости в этой точке. Применяя уравнение Бернулли, которое было выведено лишь для случая установившегося движения, к движению неустановившемуся, можно получить ошибочные результаты.

Поэтому, прежде чем применять уравнение Бернулли к определению давления на поверхности движущегося тела, нужно от неустановившегося движения в среде перейти к эквивалентному в силовом отношении установившемуся движению. Это можно сделать, если *обратить явление, т. е. рассматривать вместо движения тела в неподвижной среде движение среды относительно тела.*

Для того чтобы от движения тела в среде перейти к движению среды, обтекающей неподвижное тело, нужно представить себе, что всем точкам тела и среды сообщены скорости, равные по абсолютной величине V и противоположно ей направленные; тогда скорость тела будет равна нулю, а скорость среды в бесконечности $V_\infty = -V$. Таким образом, в исходном и обращенном движениях скорости в соответствующих точках отличаются на величину, равную V. Если $V = \text{const}$, то ускорения в соответствующих точках одинаковы, а так как силы по закону Ньютона зависят лишь от ускорений, то и силы также одинаковы в соответствующих точках обоих потоков. Иными словами, в случае равномерного, прямолинейного движения тела в среде прямое и обращенное движения в силовом отношении эквивалентны; этим обстоятельством широко пользуются как в теории, так и в эксперименте (испытание неподвижной модели в потоке аэродинамической трубы). Однако движение, обращенное по отношению к исходному, является установившимся (если тело движется с постоянной по величине и направлению скоростью), и следовательно, к обращенному движению применимо уравнение Бернулли.

4. Соотношение между статическим и динамическим давлениями в струйке. Подсасывающее действие струи. Остановимся более подробно на случае, когда движение жидкости горизонтальное (т. е. для всех сечений струйки $z = \text{const}$), или, во всяком случае, такое, что изменениями слагаемого γz в уравнении Бернулли можно пренебрегать по сравнению с изменениями других слагаемых. Это — весьма важный частный случай. Всегда, когда рассматривается горизонтальный полет, можно считать, что и частицы среды движутся приблизительно горизонтально. Уравнение Бернулли при этом принимает вид

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} \qquad (2.21)$$

для всех сечений одной и той же струйки. Это уравнение является основным уравнением, с помощью которого вычисляются давления в несжимаемой жидкости, если известны скорости, и, наоборот, — скорости, если известны давления. Для определения поля скоростей потока в случае движения удобообтекаемого тела имеются, как мы увидим в гл. IV, методы расчета, которые дают хорошее совпадение вычисленных значений скорости с действительными. Когда скорости, таким образом, определены, давления могут быть вычислены по уравнению (2.21). Рассмотрим подробнее уравнение (2.21) и вытекающие из него следствия.

Это уравнение связывает статическое и динамическое давления для всех точек, находящихся на одной и той же струйке: сумма этих давлений должна быть вдоль всей струйки величиной постоянной; иными словами, увеличение или уменьшение скорости и, следовательно, динамического давления в одном сечении струйки по сравнению с другим сопровождается соответственно уменьшением или увеличением статического давления. Если, например, жидкость движется по горизонтальной трубе, имеющей местное сужение, как показано на рис. 2.12, то по уравнению расхода жидкости скорость в суженом сечении *22* больше, чем в сечении *11* до сужения; следовательно, статическое давление p в сечении *22* должно быть меньшим, нежели в сечении *11*. Поставив в каждое из этих сечений по пьезометру, можно убедиться на опыте в том, что уровень жидкости во втором пьезометре будет ниже уровня жидкости в первом, в полном согласии с уравнением (2.21).

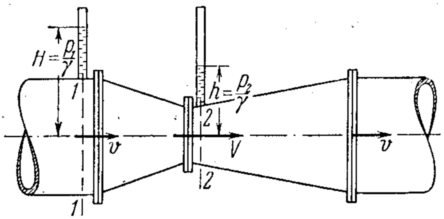

Рис. 2.12. Изменение статического давления в жидкости при изменении сечения трубы.

С точки зрения механики это нетрудно понять, если обратить внимание на то, что, переходя от широкого сечения к узкому, частицы жидкости испытывают ускорение, направленное вдоль потока, и следовательно, согласно закону Ньютона разность давлений должна быть направлена также вдоль потока, т. е. давление в первом сечении должно быть больше, чем во втором.

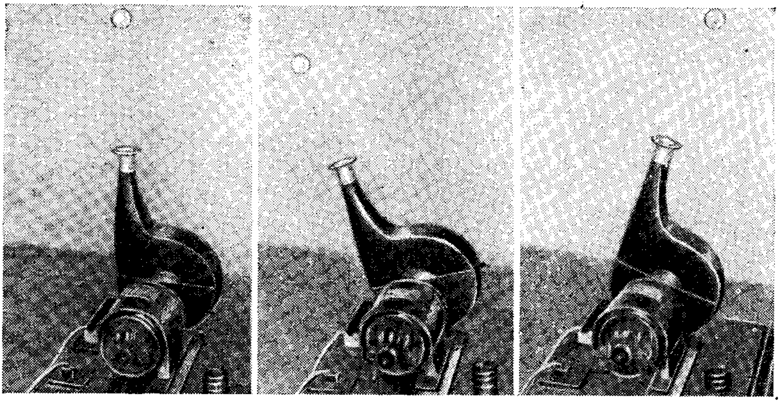

Рис. 2.13. Подсасывающее действие струи. Легкий шарик, находящийся в струе, следует за изменением положения струи.

Можно проиллюстрировать зависимость между давлением и скоростью простыми и вместе с тем весьма любопытными *опытами над действием струи на находящееся в ней тело*. Один из таких опытов изображен на помещенных здесь фотографиях (рис. 2.13). Вентилятор, заключенный в поворотный кожух, приводится во вращение от электромотора. Создаваемая вращением вентилятора струя выбрасывается через насадок. В струю можно поместить, например, легкий шарик от пинг-понга так, чтобы он уравновесился в струе, направленной снизу вверх. Если теперь, поворачивая кожух вентилятора на его валу, изменить направление струи, вытекающей из насадка, то оказывается, что шарик не выпадает из струи, а наоборот следует за ней; можно при этом достичь значительного диапазона изменения угла между направлением струи и вертикалью. Этот эффективный опыт «управления» телом на расстоянии с помощью направленной на него струи делается понятным, если рассмотреть аэродинамические силы, действующие на шарик при наклонном положении струи. Верхняя часть шарика находится здесь в струе; вдоль поверхности шарика в этой его части воздух движется с относительно большой скоростью, как обычно при обтекании выпуклой криволинейной поверхности[1]). Следовательно, по уравнению Бернулли (2.21) давления, действующие на поверхность шарика в верхней его части, будут малы. Это будут давления, во всяком случае меньшие атмосферного (действующего в нижней части шарика); иначе их называют «подсасывания». Как видно из рис. 2.14, результирующая давлений направлена вертикально вверх и уравновешивает вес шарика. При изменении направления струи шарик следует за ней, так как давления на его поверхность со стороны струи меньше, чем давления снаружи.

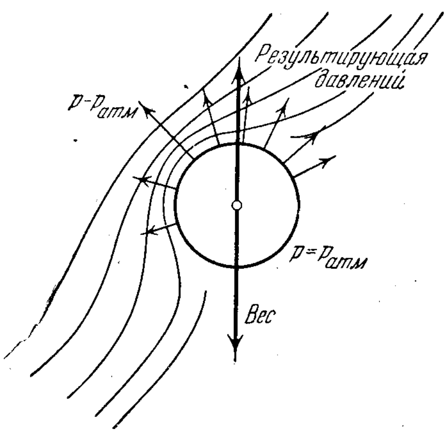

Рис. 2.14. Силы, действующие на шарик при наклонном положении струи.

На том же приборе можно еще иначе продемонстрировать подсасывающее действие струи. Нужно лишь взять насадок с плоской шайбой на конце (рис. 2.15). Если в струю, вытекающую из насадка, поместить плоскую пластинку перпендикулярно к струе, то оказывается, что действие струи на пластинку будет различным в зависимости от того, находится ли пластинка на значительном расстоянии от шайбы или в непосредственной близости к ней. В первом случае струя обтекает пластинку, на передней стороне пластинки в результате торможения струи создаются давления, бо́льшие атмосферных, на задней — в связи с отрывом потока и вихреобразованиями — давления, меньшие атмосферных; результирующая всех давлений представляет собой силу сопротивления пластинки и направлена, очевидно, по потоку. Во втором случае при малом зазоре между пластинкой

[1]) Мы убедимся в этом в дальнейшем.

и шайбой струя движется вдоль передней стороны пластинки с большой скоростью. Следовательно, давления на этой стороне по уравнению Бернулли (2.21) малы, во всяком случае меньше атмосферных. На другую же сторону пластинки действует атмосферное давление. В результате сила «сопротивления» пластинки, как это ни парадоксально на первый взгляд, направлена против скорости струи, иными словами, пластинка стремится присосаться к шайбе.

На использовании подсасывающего действия струи основаны многие устройства, широко применяющиеся в технике. Сюда

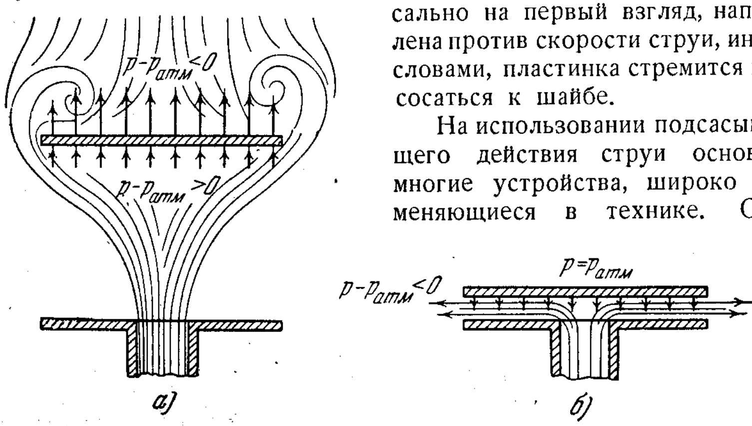

Рис. 2.15. Действие струи на пластинку. *а*) На большом расстоянии от насадка струя обтекает пластинку с обеих сторон. Сила сопротивления направлена по потоку. *б*) При малом зазоре между насадком и пластинкой струя движется только вдоль одной стороны. Результирующая давлений стремится уменьшить зазор.

относятся: эжекторы, струйные насосы, с помощью которых достигаются, как известно, наиболее высокие степени разрежения (вакуума), карбюраторы авиационных двигателей и пр.

5. Предельная скорость. Кавитация. Применяя уравнение Бернулли, необходимо помнить, что оно пригодно лишь для ограниченного диапазона скоростей. Условия, накладываемые на давление в жидкости, приводят к ограничениям и для скорости.

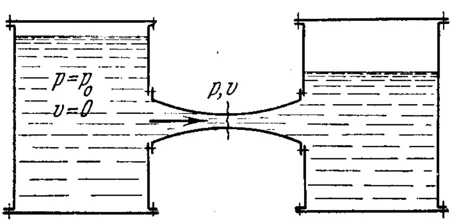

Рис. 2.16. К определению предельной скорости течения.

Поясним это на простейшем примере. Представим себе резервуар с жидкостью и присоединенный к нему трубопровод, имеющий в каком-либо месте сужение (рис. 2.16). Обозначим через p_0 давление в том месте резервуара, где скорость можно считать равной нулю (на большом расстоянии от входа в трубопровод), и через p и v соответственно давление и скорость в сжатом сечении трубопровода. По уравнению Бернулли

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_0.$$

Из последнего равенства видно, что если при данном значении p_0 увеличить скорость в сжатом сечении (уменьшая его площадь), то давление в этом сечении будет уменьшаться. Скорость может достигнуть при своем возрастании такой величины, что давление p, уменьшаясь, получится из последнего уравнения отрицательным. Однако при выводе уравнения Бернулли мы предполагали, что выделенный в жидкости элемент под действием давлений, приложенных к нему, может находиться только в сжатом состоянии и не выдерживает растягивающих усилий, т. е. предполагали, что в жидкости не может быть $p < 0$. Поэтому уравнение Бернулли можно принять только в тех случаях, когда давление нигде в струйке не достигает минимального значения. Отсюда заключаем, что существует максимальная, предельная скорость, при которой еще возможно применение уравнения Бернулли; при скоростях $v > v_{\text{пред}}$ его применять нельзя, так как получаются давления $p < 0$, что может привести к разрыву струйки в жидкости. Полагая в последнем равенстве $p_{\min} = 0$, находим:

$$v_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Если, например, $p_0 = 2$ *ата* $= 20\,000$ *кг/м²*, то для воды, у которой $\rho = 102$ *кг сек²/м⁴*, получается:

$$v_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\,000}{102}} \approx 19{,}8 \text{ м/сек}.$$

Опыты со стеклянными трубками, имеющими местное сжатие, показывают, что, когда скорость протекающей в них жидкости, возрастая, приближается к предельной, в потоке происходят новые явления, которые не наблюдаются при малых скоростях. Эти явления заключаются в том, что сначала в области пониженного давления происходит выделение из воды мельчайших пузырьков растворенного в ней воздуха. При дальнейшем понижении давления эти пузырьки скапливаются, занимаемая ими область увеличивается по длине, затем появляются более крупные пузыри и, наконец, вся жидкость в области пониженного давления и непосредственно за ней приходит в состояние бурного кипения. Следует вспомнить из физики, что при понижении давления температура кипения жидкости также понижается. В области пониженного давления жидкость может закипеть при нормальной температуре. Выделение пузырьков растворенного воздуха сопровождается характерными вибрациями и потрескиванием, которое затем сменяется глухим шумом. Описанное явление называется *кавитацией*; оно имеет место не только при течении жидкости в трубке с местным сжатием, а везде, где возникает в жидкости пониженное давление, близкое к минимальному: в гидравлических турбинах, быстроходных насосах, при обтекании лопастей гребных винтов и т. д.

Кавитация при движении в трубе влечет за собой значительные потери энергии потока; при обтекании тел кавитация сопровождается резким увеличением их лобового сопротивления и уменьшением подъемной силы; гидравлические машины и гребные винты при наличии кавитации работают с малым коэффициентом полезного действия. Если кавитация происходит вблизи стенки, то под действием давлений ударного характера и повышенного содержания кислорода в воздухе, растворенном в воде (34% кислорода по сравнению с 21% в атмосферном воздухе), начинается коррозия и разрушение материала стенки. Разрушение от ударов при образовании пузырей зависит от состояния поверхности стенки: наиболее стойкими оказываются гладкие стенки, наименее стойкими — шероховатые.

Необходимо иметь в виду, что минимальное давление в жидкости, а следовательно, и начало кавитации зависят от температуры. Минимальное давление определяется упругостью насыщенных паров данной жидкости; чем больше температура жидкости, тем больше давление ее насыщенных паров, а следовательно, и давление $p_{\min}$, при котором начинается кипение жидкости. Так, например, для воды при температуре $60°$ С $p_{\min}=2028$ *кг/м²*, при температуре $80°$ С $p_{\min}=$ $=4828$ *кг/м²*; тогда как, например, при $15°$ С $p_{\min}=180$ *кг/м²*.

§ 7. Приборы для измерения скорости движения жидкости

Наиболее широко применяемые в настоящее время приборы для измерения скорости движения жидкости основаны на использовании уравнения Бернулли. С помощью этих приборов непосредственно измеряется лишь давление, а скорость затем определяется вычислением по уравнению Бернулли. В каждом из приборов, измеряющих давление, можно выделить две части: приемник давления, который находится в исследуемой точке потока, и регистратор давления, с помощью которого определяется величина давления, полученного приемником.

Мы рассмотрим сначала наиболее употребительные приемники давления.

1. Скоростная трубка. В своем первоначальном виде скоростная трубка (она была предложена Пито еще в 1732 г. для определения скорости движения воды в открытом русле) представляла собой прибор для измерения полного давления в потоке. В соединении с известным из предыдущей главы способом измерения статического давления с помощью пьезометра скоростная трубка позволяет определять динамическое давление, а значит, и скорость потока.

Представим себе, что в движущуюся по горизонтальной цилиндрической трубе жидкость опущена трубка, подобная обыкновенному пьезометру и отличающаяся от него лишь тем, что ее открытый конец изогнут навстречу потоку (рис. 2.17). Такую трубку мы будем называть трубкой Пито; нетрудно видеть, что давление (статическое) в открытом конце трубки Пито равно сумме статического и динамического давлений в потоке.