в пьезометрической трубке, то сквозь лупу виден как сам мениск, так и его перевернутое изображение в вогнутом зеркале (рис. 2.27, *б*). Когда прямое и перевернутое изображения соприкоснутся, то оптическая ось прибора проходит через нижний край мениска. По шкале, вдоль которой скользит каретка, и нониусу отсчитывают высоту столба жидкости до нижнего края мениска. Точность отсчета может достигать при этом сотой доли миллиметра.

В качестве рабочей жидкости в микроманометрах, используемых в практике аэродинамической лаборатории, применяют: для малых разностей давления спирт ($\gamma \approx 800$ *кг/м*³), для средних разностей давления — тетрабромэтан ($\gamma \approx 3000$ *кг/м*³), для больших разностей давления — ртуть ($\gamma = 13\,600$ *кг/м*³).

§ 8. Скорость распространения упругих возмущений в газе (скорость звука)

Прежде чем интегрировать уравнение энергии (2.17) для сжимаемой жидкости, рассмотрим некоторые ее особенности. Представим себе сначала несжимаемую жидкость, находящуюся в длинной трубке и ограниченную поршнями A и B (рис. 2.28). В силу несжимаемости жидкости всякое перемещение поршня A вызовет в тот же момент такое же перемещение поршня B (так, как если бы между A и B было твердое тело). Иными словами, изменения давления, вызванные перемещениями поршня A, передаются в несжимаемой жидкости мгновенно, т. е. с бесконечно большой скоростью. Иначе обстоит дело в сжимаемой жидкости. При перемещении поршня перед ним возникает уплотнение, которое передвигается вперед с конечной скоростью, зависящей от состояния и свойств жидкости. Вычислим скорость распространения в газе малых (упругих) возмущений.

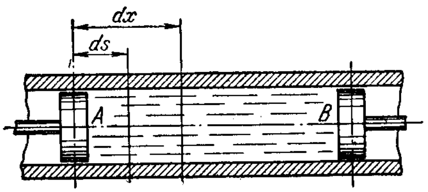

Рис. 2.28. В несжимаемой жидкости возмущения распространяются мгновенно (с бесконечно большой скоростью). В сжимаемой — упругие возмущения распространяются со скоростью $dx/dt = a$.

Пусть за время dt поршень продвинулся на длину ds, а вызванное им возмущение распространилось вдоль трубы на длину dx. Рассматривая газ как упругую среду и применяя к нему известный из предыдущего (гл. I, § 3) закон пропорциональности между изменением давления и относительной деформацией, можно записать, что сила приходящаяся на единицу площади поперечного сечения трубы, равна произведению модуля упругости для газа на относительное удлинение. Так как в движение приведена часть газа длиною (вдоль трубы) dx, а в результате перемещения поршня эта длина уменьшилась на ds, то будем считать за относительное удлинение величину ds/dx; тогда получим:

$$\frac{F}{S} = E\frac{ds}{dx},$$

где F есть приложенная поршнем сила, E — модуль Юнга для газа, а S — площадь поперечного сечения трубы.

Применим к массе газа, приведенной поршнем в движение, теорему импульсов, которая, как известно из курса общей механики, формулируется следующим образом: *дифференциал количества движения материальной системы равен элементарному импульсу действующих на систему внешних сил*:

$$F\,dt = d\,(mv).$$

В данном случае масса газа, приведенная в движение, равна $\rho S\,dx$, и если предположить ввиду малости dx, что все частицы этой массы движутся с одной и той же скоростью, равной ds/dt, то полученное массой количество движения будет равно $\rho S\,dx\frac{ds}{dt}$. Следовательно, по теореме импульсов

$$ES\frac{ds}{dx}\,dt = \rho S\frac{dx}{dt}\,ds.$$

Здесь dx/dt представляет собой интересующую нас скорость распространения упругих возмущений; обозначив ее через a, получаем:

$$\frac{E}{a} = \rho a,$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (2.22)$$

Такая же формула получилась бы и в том случае, если бы газ не был ограничен стенками трубы, а вместо поршня был другой источник возмущения (изменения давления), как, например, звучащий камертон. В этом последнем случае формула (2.22) давала бы величину *скорости распространения звуковых колебаний в газе*, которые, как известно из физики, представляют собою продольные упругие колебания.

Рассмотрим более общий случай, когда продольные упругие колебания исходя из какой-либо точки, распространяются в неограниченной газовой среде. Вычислим и для этого случая скорость распространения этих колебаний. Вследствие симметрии, колебания давления будут распространяться с одинаковой для всех направлений скоростью a по прямым линиям, проходящим через начальную точку. Через t секунд после начала распространения колебаний они достигнут поверхности сферы с центром в начальной точке и радиусом, равным at (рис. 2.29). За время dt радиус этой сферы увеличится еще на $dr = a\,dt$. Объем V массы газа, на которую распространилось возмущение за время dt, приближенно можно считать равным $4\pi r^2\,dr = 4\pi r^2 a\,dt$. Если обозначить через v скорость движения газа, вызванную прохождением волны давления или разрежения сквозь поверхность сферы радиуса r, то изменение объема V за время dt запишется в виде $dV = -v\,dt \cdot 4\pi r^2$. Отсюда следует, что относительная объемная деформация равна

$$\frac{dV}{V} = -\frac{v}{a}.$$

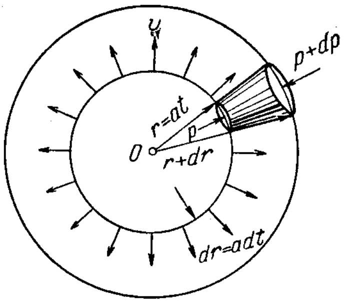

Рис. 2.29. Схема к вычислению скорости распространения продольных упругих колебаний в газе для случая точечного источника колебаний.

По закону пропорциональности между изменением давления и относительной объемной деформацией (см. гл. I, § 3) можем написать:

$$dp = -E\frac{dV}{V}, \qquad (2.23)$$

где E есть модуль упругости в данной точке газовой среды. Следовательно, в данном случае

$$dp = E\frac{v}{a}.$$

Выделим теперь из массы газа, находящейся между сферами с радиусами r и $r + dr$, часть, ограниченную боковой поверхностью конуса с вершиной в источнике возмущения и телесным углом, равным $d\Omega$. Применим к этой части теорему импульсов. Так как выделенная масса равна $\rho d\Omega r^2 dr$, то, предполагая, как и в предыдущем выводе, скорости всех частиц в объеме dV одинаковыми, получим, что количество движения равно $d\Omega r^2 \rho v\,dr$. Импульс сил давления равен $dp\,d\Omega r^2\,dt$. По теореме импульсов находим:

$$dp = \rho v a.$$

Сравнивая это выражение для dp с предыдущим, вновь получаем формулу (2.22).

Величину модуля Юнга для газа можно выразить через давление и плотность. В самом деле, для малого объема газа V уравнение неразрывности движения (2.1) можно приближенно записать в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0;$$

отсюда

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho};$$

по формуле (2.23) находим:

$$E = \rho\frac{dp}{d\rho}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.22), получим:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \qquad (2.24)$$

Из этой формулы, так же как из формулы (2.22), видно, что скорость распространения звука является одной из важнейших механических характеристик газа, именно характеристикой его сжимаемости. Действительно, величина $d\rho/dp$ представляет собой изменение плотности, приходящееся на единицу изменения давления и, как следует из формулы (1.1) и уравнения неразрывности движения, непосредственно связана с коэффициентом сжимаемости β_p:

$$\frac{d\rho}{dp} = \rho\beta_p.$$

Отсюда следует, что

$$a^2 = \frac{1}{\rho\beta_p},$$

т. е. что *a также является характеристикой сжимаемости среды: чем более сжимаема среда, тем меньше скорость распространения звука,* и наоборот; для несжимаемой среды $a = \infty$.

Процесс распространения упругих колебаний давления в газе можно рассматривать, как адиабатический процесс, так как он протекает достаточно быстро для того, чтобы обмен теплотой у частиц газа не успевал происходить. Влиянием вязкости при этом можно пренебрегать. Для адиабатического процесса зависимость давления от плотности определяется уравнением адиабаты (см. гл. I, § 6):

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,$$

где k есть показатель адиабаты, а p_0 и ρ_0 суть давление и плотность в некоторой фиксированной точке. Следовательно,

$$\frac{dp}{d\rho} = k\frac{p_0}{\rho_0^k}\rho^{k-1} = k\frac{p}{\rho^k}\rho^{k-1} = k\frac{p}{\rho},$$

и для a получаем формулу

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}. \tag{2.25}$$

Так как по уравнению состояния газа

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

где R есть газовая постоянная, а T — абсолютная температура, то можно также написать, что

$$a = \sqrt{kRT}. \tag{2.26}$$

Из кинетической теории газа известно, что средняя скорость теплового движения молекул газа также пропорциональна $\sqrt{T}$. Отсюда следует, что чем быстрее движутся молекулы газа, тем с большей скоростью происходит в нем передача малых колебаний давления.

Таким образом, в газах, в отличие от несжимаемой жидкости, упругие возмущения распространяются с конечной скоростью a, разной в разных точках и зависящей для данного газа только от отношения давления к плотности в данной точке (2.25) или от абсолютной температуры в данной точке (2.26). Величина скорости звука a, которая, как уже указывалось, является характеристикой сжимаемости газа, играет важнейшую роль во всей механике газа; как увидим в дальнейшем, законы движения газа резко отличаются друг от друга в зависимости от того, больше ли скорость движения газа скорости распространения звука или меньше ее. Рассмотрим один из простейших примеров этого различия в следующем параграфе.

§ 9. Зависимость между площадью поперечного сечения струйки и скоростью движения идеального газа. Число М

Выясним, как изменяется скорость вдоль струйки газа при изменении площади поперечного сечения струйки. По уравнению расхода для струйки сжимаемой жидкости (уравнение (2.7)) мы имеем:

$$\rho v \sigma = \text{const}$$

вдоль струйки. Дифференцируя это уравнение и деля затем почленно на $\rho v \sigma$, получим:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma}{\sigma} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = -\frac{dv}{v}\left(1 + \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dv}{v}}\right). \tag{2.27}$$

Воспользуемся теперь уравнением энергии в дифференциальной форме (уравнение (2.17)). Предположим, что силы трения в газе отсутствуют (жидкость идеальная) и движение газа горизонтальное ($dz = 0$); тогда уравнение (2.17) примет вид

$$dU + \frac{1}{2}\,dv^2 + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dQ,$$

или

$$dU + \frac{1}{2}\,dv^2 + \frac{1}{\rho}\,dp + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dQ.$$

Согласно первому закону термодинамики имеем:

$$dU + p\,dV = dQ,$$

где V есть объем одного килограмма массы газа, равный $1/\rho$. Принимая во внимание этот закон, получим из предыдущего равенства:

$$\frac{1}{2}\,dv^2 + \frac{1}{\rho}\,dp = 0,$$

или

$$v\,dv = -\frac{1}{\rho}\,dp. \tag{2.28}$$