скорости вдоль сопла происходит по кривой типа *б*: во входной части скорость уменьшается, в сжатом сечении достигает минимума и затем в выходной части нарастает. Если сопло спроектировано так, что в сжатом сечении $v=a$, то обе кривые соприкоснутся в точке, соответствующей этому сечению (пунктирные кривые на рис. 2.31). При этом по инерции поток продолжает ускоряться в сечении, где $v=a$ и распределение скорости переходит с кривой типа *а* на кривую типа *б*, т. е. в этом случае сопло Лаваля плавно переводит дозвуковой поток в сверхзвуковой.

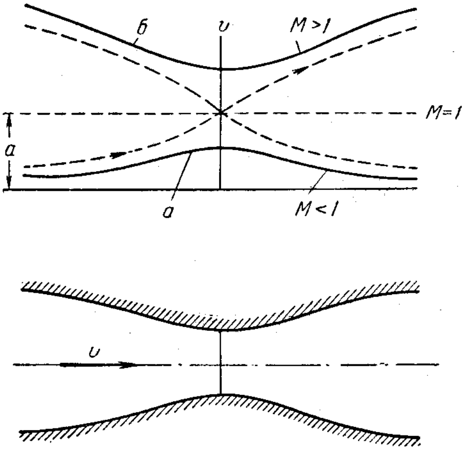

Рис. 2.31. Распределение скорости газа вдоль сопла Лаваля: *а* — при дозвуковом течении; *б* — при сверхзвуковом течении. Если скорость, нарастая, становится в сжатом сечении сопла равной *а*, то в расширяющейся части происходит дальнейшее увеличение скорости по кривой типа *б*.

Сопло Лаваля применяется с такой целью в сверхзвуковых аэродинамических трубах, паровых и газовых турбинах, турбореактивных двигателях и т. д. Впервые оно было применено в 1889 г. шведским инженером Лавалем в конструкции быстроходной паровой турбины. Желая получить возможно бо́льшую кинетическую энергию струи пара, удар которой о рабочие лопатки приводит во вращение рабочее колесо турбины, Лаваль применял сначала сужающиеся насадки. Однако опыт показал, что как только в выходном сечении такого насадка достигается скорость истечения, равная скорости звука, дальнейшее увеличение скорости при сужении насадка прекращается. Тогда Лаваль присоединил к сужающемуся насадку, в котором была достигнута звуковая скорость, расширяющийся насадок и оказалось, что при таком расширении скорость потока продолжает нарастать и поток из дозвукового переходит в сверхзвуковой.

§ 10. Уравнение энергии для установившегося движения идеальной сжимаемой жидкости

Рассмотрим установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости. Уравнение энергии в дифференциальной форме (2.17) принимает для этого случая следующий вид:

$$dU+\frac{1}{2}d(v^2)+g\,dz+d\left(\frac{p}{\rho}\right)=dQ. \qquad (2.31)$$

В наиболее простой форме можно представить интеграл этого уравнения, если ввести понятие о теплосодержании газа; теплосодержанием (или энтальпией) газа называется количество тепла, которое нужно сообщить при постоянном давлении одному килограмму газа для повышения температуры газа от абсолютного нуля до T (предполагая, что $c_p = \mathrm{const}$):

$$i = c_p T,$$

где i есть теплосодержание или энтальпия газа, c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, а T — абсолютная температура. Как известно из термодинамики,

$$di = dU + d(pV) = dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

Уравнение энергии (2.31) теперь можно записать в виде

$$\frac{1}{2} d(v^2) + g\,dz + di = dQ.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем уравнение энергии в конечной форме для струйки идеального газа

$$\frac{v^2}{2} + gz + (i - Q) = \mathrm{const} \tag{2.32}$$

вдоль данной струйки.

Можно вывести уравнение энергии для струйки газа, не пользуясь понятием о теплосодержании. Согласно первому закону термодинамики

$$dQ = dU + p\,dV;$$

подставляя это выражение в уравнение (2.31) и замечая, что последнее слагаемое в левой части этого уравнения можно представить в виде

$$pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\,dp = p\,dV + \frac{1}{\rho}\,dp,$$

получим уравнение энергии для струйки газа в дифференциальной форме, содержащей только механические величины:

$$\frac{1}{2} d(v^2) + g\,dz + \frac{1}{\rho}\,dp = 0. \tag{2.33}$$

При интегрировании этого уравнения следует принять во внимание, что плотность ρ есть величина переменная, зависящая от давления. Зависимость плотности от давления определяется тепловым процессом, происходящим в газе. Наиболее часто приходится иметь дело на практике с адиабатическим процессом, для которого зависимость плотности от давления определяется формулой

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}. \tag{2.34}$$

Интегрируя уравнение (2.33), получаем:

$$\frac{v^2}{2}+gz+\int\frac{dp}{\rho}=\text{const}$$

вдоль струйки газа. Подставляя под знак интеграла вместо ρ его выражение по формуле (2.34), сможем вычислить этот интеграл до конца:

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}\int\frac{dp}{p^{1/k}}=\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}p^{1-1/k}=\frac{k}{k-1}\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}p^{(k-1)/k}.$$

Но так как по уравнению адиабаты получается:

$$\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}=\frac{p^{1/k}}{\rho},$$

то

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}.$$

Уравнение энергии для струйки идеальной сжимаемой жидкости принимает, таким образом, в случае отсутствия теплообмена следующий вид:

$$\frac{v^2}{2g}+z+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\gamma}=\text{const}. \qquad (2.35)$$

Это уравнение похоже на уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости, но отличается от него множителем $k/(k-1)$ при пьезометрической высоте p/γ, а также тем, что γ здесь — величина переменная. Уравнение (2.35) можно представить в разных формах, каждая из которых удобна для решения определенного круга задач.

Выделим из последнего слагаемого пьезометрическую высоту, т. е. запишем это слагаемое в виде

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{1}{k-1}\frac{p}{\gamma}.$$

Так как уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$\frac{p}{\rho}=RT,$$

где R есть газовая постоянная, а T — абсолютная температура, то

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{1}{k-1}\frac{p}{\gamma}=\frac{p}{\gamma}+\frac{1}{g(k-1)}RT$$

и уравнение энергии для струйки газа принимает вид

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+z+\frac{RT}{(k-1)g}=\text{const}.$$

Последнее слагаемое здесь называется, по аналогии с предыдущими, *температурной высотой* или температурным напором. Уравнение энергии устанавливает, таким образом, что при *адиабатическом течении идеального газа сумма четырех высот: пьезометрической, скоростной, геометрической и температурной, есть величина постоянная вдоль каждой струйки.*

Если движение газа горизонтально ($z = \text{const}$) или если в случае негоризонтального движения пренебречь изменениями слагаемого z вдоль струйки по сравнению с изменениями других слагаемых (случаи больших скоростей движения или малого объемного веса газа), то уравнение (2.35) можно записать в виде

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\gamma} = \text{const} \tag{2.36}$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}RT = \text{const}. \tag{2.37}$$

Из последнего уравнения видно, что изменение скорости вдоль струйки газа всегда влечет за собой изменение температуры. Если скорость вдоль струйки увеличивается, то температура при этом, как видно из уравнения (2.37), уменьшается, и наоборот, при уменьшении скорости происходит увеличение температуры. Этим объясняется, например, тот факт, что если в баллоне со сжатым газом открыть кран или вентиль и предоставить газу с большой скоростью вытекать в атмосферу, то происходит охлаждение и даже обледенение крана или вентиля.

Можно упростить уравнение (2.37), оставив в нем вместо двух постоянных, характеризующих газовую среду (R и k), только одну. Для этого вспомним из термодинамики, что $R = (c_p - c_v)$, где c_p и c_v — теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Так как

$$k = \frac{c_p}{c_v},$$

то

$$\frac{k}{k-1}R = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v} - 1}(c_p - c_v) = c_p,$$

и следовательно, уравнение (2.37) принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{const}. \tag{2.38}$$ [1]

Из уравнения энергии также вытекает зависимость между скоростью движения газа и скоростью распространения звука в данной

[1]) Уравнение (2.38) непосредственно получается также из уравнения (2.32), выведенного в начале этого параграфа с помощью понятия о теплосодержании газа.

точке. Если воспользоваться формулами (2.25) или (2.26), то уравнение (2.36) или (2.37) можно записать в виде

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\text{const}. \tag{2.39}$$

Отсюда видно, что чем меньше скорость движения газа, тем больше в данной точке скорость распространения звука, и наоборот, при возрастании скорости течения газа скорость звука будет уменьшаться.

Применим уравнение энергии для струйки газа к решению конкретной задачи.

Скорость истечения газа из отверстия в резервуаре. В § 6 была решена задача о скорости истечения несжимаемой жидкости из отверстия в резервуаре. Рассмотрим теперь аналогичную задачу для газа. Пусть в резервуаре находится газ под давлением p_0, плотность которого мы обозначим через ρ_0. Через отверстие в стенке газ вытекает в атмосферу, давление в которой обозначим через p. Вычислим скорость истечения газа. Возьмем в вытекающей струйке два сечения: одно — внутри резервуара, где давление равно p_0, а скорость можно считать равной нулю, и другое — после выхода из резервуара, где давление равно p, а скорость равна v. Запишем для этих двух сечений уравнение (2.36)

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{v^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho},$$

отсюда находим:

$$v^2=\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p}{\rho}\right)=\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(1-\frac{p}{\rho}\frac{\rho_0}{p_0}\right).$$

По уравнению адиабаты

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k},$$

а по уравнению состояния

$$\frac{p_0}{\rho_0}=RT_0,$$

где T_0 есть температура газа в резервуаре. Подставляя эти выражения в формулу для v^2, получим:

$$v=\sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/k}\right]},$$

или, так как

$$\frac{k}{k-1}R=c_p,$$

то

$$v=\sqrt{2c_pT_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/k}\right]}.$$

Последнее равенство называется формулой Сан-Венана и Ванцеля для скорости адиабатического истечения газа. Если, например, воздух, находящийся в резервуаре под атмосферным давлением при температуре $T_0=288^\circ$ K, вытекает в пустоту, то по формуле Сан-Венана и Ванцеля получаем максимальную возможную при этих условиях скорость истечения:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} \approx 760 \text{ м/сек}.$$

Следует, однако, отметить, что истечение из отверстия при этих условиях не является адиабатическим, так что в действительности скорость $v_{\max}$ не будет достигнута.

§ 11. Предельная, критическая и приведенная скорости адиабатического течения газа

Из уравнений энергии для струйки газа (2.36) — (2.39) следует, что при установившемся адиабатическом процессе скорость течения газа ограничена: она всегда должна быть меньше некоторой максимальной или предельной скорости адиабатического течения, $v_{\max}$, которая соответствует $p=0$ или $T=0$, или $a=0$:

$$0 \leqslant v \leqslant v_{\max}.$$

Определенная таким образом максимальная скорость установившегося, адиабатического течения газа вполне аналогична предельной скорости движения несжимаемой жидкости, о которой шла речь в § 6 настоящей главы. Как в одном, так и в другом случаях, когда внешняя энергия жидкости полностью переходит в кинетическую энергию, то давление становится равным нулю. Так как ни давление, ни абсолютная температура не могут быть отрицательными, то становится невозможным и дальнейшее увеличение скорости.

Скорость распространения звука в газе также ограничена; ее наибольшая величина a_0, очевидно, соответствует точке, в которой $v=0$:

$$0 \leqslant a \leqslant a_0.$$

В покоящемся воздухе при нормальном атмосферном давлении максимальная скорость звука получается равной

$$a_0 = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{1{,}41\frac{10330}{0{,}125}} \approx 342 \text{ м/сек}.$$

Если написать уравнение энергии (2.39) для двух сечений в струйке газа: одного, в котором скорость течения равна v, а скорость звука равна a, и другого, в котором $v=0$ и $a=a_0$, то получится:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}. \tag{2.40}$$

Из этого уравнения, полагая в нем $a=0$ и соответственно $v=v_{\max}$, находим:

$$v_{\max} = a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}}.$$