воздуха у поверхности быстро возрастает. В дальнейшем будут рассмотрены способы решения проблемы аэродинамического нагрева.

Вычислим давление и плотность газа в точке адиабатического торможения. Подставим в равенство (2.46) вместо a его выражение по формуле (2.25); тогда получим:

$$\frac{p_0}{p_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho_0}=1+\frac{k-1}{2}\mathsf{M}_\infty^2.$$

Из уравнения адиабатического процесса следует:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_0}=\left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{1/k};$$

подставляя это выражение в предыдущее равенство и решая его относительно p_0/p_∞, находим:

$$\frac{p_0}{p_\infty}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathsf{M}_\infty^2\right)^{k/(k-1)}. \tag{2.48}$$

Отсюда по уравнению адиабатического процесса получаем выражение для плотности

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathsf{M}_\infty^2\right)^{1/(k-1)}. \tag{2.49}$$

Зависимости (2.48) и (2.49) представлены в виде графиков на рис. 2.36. Следует отметить, что в формуле (2.48) можно полагать $\mathsf{M}_\infty=0$ лишь в том случае, когда $v_\infty=0$; при $a_\infty=\infty$, т. е. для случая несжимаемой жидкости, эта формула непосредственно непригодна, так как при ее выводе использована зависимость скорости звука от давления, относящаяся только к газу.

§ 13. Зависимость давления в струйке газа от давления торможения. Погрешность при вычислении давления и плотности в газе по формулам для несжимаемой жидкости

Уравнение энергии для струйки газа значительно сложнее, нежели уравнение Бернулли для струйки несжимаемой жидкости, так как объемный вес газа γ есть величина переменная вдоль струйки. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли при вычислении давлений в газе пользоваться при определенных условиях вместо уравнения (2.36) значительно более простым уравнением (2.21). Разумеется, уравнение (2.21) в применении к газу не является точным уравнением, а лишь приближенным. Вычислим величину погрешности, которая получается, если определять давления в газе по уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости.

Для этого сопоставим давления, вычисленные для газа по уравнению (2.36), с давлениями, которые получаются при тех же скоростях по уравнению (2.21) для несжимаемой жидкости. Имея в виду вычислить погрешность от применения к газу уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости, мы должны сопоставить между собой максимальные давления, вычисленные для случаев сжимаемой и несжимаемой жидкостей, так как между ними возможны и наибольшие различия.

Для того чтобы удобнее было сопоставить давление в критической точке, вычисляемое для газа по формуле (2.48) с давлением в критической точке, вычисляемым по уравнению (2.21) для несжимаемой жидкости, разложим правую часть равенства (2.48) в бесконечный степенной ряд (биномиальный).

Из математики известно, что биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

сходится лишь при значениях $|x| < 1$. Поэтому, разлагая в ряд правую часть равенства (2.48), мы должны ограничиться такими значениями числа M, при которых второе слагаемое в выражении, находящемся в скобках, будет меньше единицы. Так как для воздуха $k = 1{,}41$, то это условие будет заведомо выполнено, если предположим, что $\mathrm{M}_\infty < 1$, т. е. что поток дозвуковой.

Приняв это ограничение, будем иметь:

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{k}{2}\mathrm{M}_\infty^2 + \frac{\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)}{1\cdot 2}\frac{(k-1)^2}{4}\mathrm{M}_\infty^4 + \ldots,$$

откуда

$$p_0 = p_\infty + \frac{k}{2}p_\infty \mathrm{M}_\infty^2 + \frac{k}{8}p_\infty \mathrm{M}_\infty^4 + \frac{k}{48}(2-k)p_\infty \mathrm{M}_\infty^6 + \ldots$$

Заметим теперь, что второе слагаемое в правой части представляет собой динамическое давление

$$\frac{k}{2}p_\infty \mathrm{M}_\infty^2 = \frac{k}{2}p_\infty \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{k}{2}p_\infty \frac{V_\infty^2}{k\frac{p_\infty}{\rho_\infty}} = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2};$$

следовательно, предыдущее равенство можно переписать в виде

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{M}_\infty^2 \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} + \frac{2-k}{24}\mathrm{M}_\infty^4 \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} + \ldots$$

Первые два слагаемых в этом разложении совпадают с выражением для p_0 в случае несжимаемой жидкости. Следовательно, вычисляя давление p_0 в газе по уравнению (2.21), т. е. считая газ несжимаемой жидкостью, мы делаем погрешность Δp, всегда отрицательную по знаку, равную

$$p_{0\,\text{несж}} - p_{0\,\text{сж}} = \Delta p = -\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\left(\frac{1}{4}\mathrm{M}_\infty^2 + \frac{2-k}{24}\mathrm{M}_\infty^4 + \ldots\right).$$

Относительная погрешность, вычисленная в долях динамического давления в потоке $\rho_\infty V_\infty^2/2$, по абсолютной величине равна

$$\varepsilon_p = \frac{|\Delta p|}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}} = \frac{1}{4}\,\mathsf{M}_\infty^2 + \frac{2-k}{24}\,\mathsf{M}_\infty^4 + \ldots$$

Отсюда видно, что чем меньше число M_∞, тем с большей степенью точности можно применять к вычислению давлений в газе уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости. Так как при $\mathsf{M}_\infty \ll 1$ последний ряд сходится весьма быстро, то при оценке погрешности можно считать в первом приближении, что

$$\varepsilon_p \approx \frac{1}{4}\,\mathsf{M}_\infty^2.$$

При значении $\mathsf{M}_\infty = 0{,}2$, т. е. при скорости набегающего потока $V_\infty = 68$ *м/сек*, по этой формуле получается $\varepsilon_p = 0{,}01$ или, в процентах, $\varepsilon_p = 1\%$. Такая погрешность вполне допустима в технических расчетах, и следовательно, *при скоростях, не превышающих приблизительно 70 м/сек (250 км/час), можно вычислять давления в потоке воздуха так, как если бы он был несжимаемой жидкостью.*

Определим теперь, насколько изменяется плотность в зависимости от условий движения. Разлагая правую часть формулы (2.49) в биномиальный ряд при тех же ограничениях, накладываемых на скорость, что и в предыдущем разложении, получим в результате

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} = 1 + \frac{1}{2}\,\mathsf{M}_\infty^2 - \frac{1}{8}\,k\mathsf{M}_\infty^4 + \ldots$$

Таким образом, погрешность $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_\infty$ равна

$$\Delta\rho = \rho_\infty\left(\frac{1}{2}\,\mathsf{M}_\infty^2 - \frac{1}{8}\,k\mathsf{M}_\infty^4 + \ldots\right),$$

а относительная погрешность

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} = \frac{1}{2}\,\mathsf{M}_\infty^2 - \frac{1}{8}\,k\mathsf{M}_\infty^4 + \ldots$$

В первом приближении при малых значениях числа M_∞ можно считать, что

$$\varepsilon_\rho \approx \frac{1}{2}\,\mathsf{M}_\infty^2.$$

Погрешность при вычислении плотностей, как отсюда видно, больше в два раза, нежели погрешность при вычислении давлений при тех же значениях M_∞.

В следующей таблице даны величины ε_p и ε_ρ для воздуха при различных значениях скорости V_∞.

Таблица 3

Поправки на сжимаемость воздуха

V_∞, *м/сек*	34	68	102	136	170	204	238	272	306	340
$\mathrm{M}_\infty = V_\infty/a_\infty$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ε_p, %	0,25	1	2,25	4	6,2	9	12,8	17,3	21,9	27,5
ε_ρ, %	0,5	2	4,5	8	12,9	18,9	26,3	35	45,3	57,2

До сих пор мы сопоставляли максимальные давления и плотности в потоках сжимаемой и несжимаемой жидкостей, предполагая, что при разных скоростях V_∞ давления на бесконечности в обоих случаях одинаковы. Такое предположение соответствует задаче об обтекании тела средой. В других задачах, например в задачах об истечении газа, заданной величиной является давление покоящегося газа (т. е. давление, которое мы обозначаем через p_0) и следует сопоставить давления в струе в сжимаемой и несжимаемой жидкостях при разных скоростях, но при одном и том же p_0. Для того чтобы выразить p через p_0, напишем еще раз уравнение (2.36)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}.$$

Разделим почленно обе части этого равенства на выражение, стоящее в правой части:

$$\frac{p}{\rho}\frac{\rho_0}{p_0} = 1 - \frac{k-1}{k}\frac{\rho_0 v^2}{2p_0}.$$

Выражая здесь по уравнению адиабатического процесса отношение плотностей через отношение давлений и вычисляя затем p/p_0, получим:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k}\frac{\rho_0 v^2}{2p_0}\right)^{k/(k-1)}.$$

Заметив, что

$$\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = v_{\max}^2,$$

мы сможем представить зависимость давления от скорости для струйки газа следующим образом:

$$p = p_0\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{k/(k-1)}. \qquad (2.50)$$

Эта зависимость изображена в виде графика на рис. 2.37. При $v=0$ $p/p_0=1$; с возрастанием скорости p убывает, пока не становится равным нулю при $v=v_{\max}$.

Кривая, изображающая зависимость p/p_0 от $v/v_{\max}$, по уравнению (2.50) имеет точку перегиба. В самом деле, дважды дифференцируя (2.50), получаем:

$$\frac{d^2p}{dv^2}=-\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{v_{\max}^2}\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{2-k}{k-1}}\left(1-\frac{k+1}{k-1}\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right).$$

В точке, в которой последний множитель обращается в нуль, т. е. при

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2}=\frac{k-1}{k+1}$$

равна нулю и d^2p/dv^2. Как известно из предыдущего (формула (2.42)), последнее равенство определяет скорость, равную местной скорости распространения звука, т. е. критическую скорость $v_{\text{кр}}$. Таким образом, при $v=a$ $d^2p/dv^2=0$; из выражения для d^2p/dv^2 видно, кроме того, что

$$\text{при } v<a \quad \frac{d^2p}{dv^2}<0; \quad \text{при} \quad v>a \quad \frac{d^2p}{dv^2}>0;$$

иными словами, в дозвуковой области кривая обращена выпуклостью вверх, в сверхзвуковой — вниз.

В несжимаемой жидкости по уравнению (2.21)

$$p=p_0-\frac{\rho v^2}{2}=p_0\left(1-\frac{\rho v^2}{2p_0}\right)$$

Так как

$$\frac{2p_0}{\rho}=v_{\text{пред}}^2,$$

то предыдущее равенство можно записать в виде

$$p=p_0\left(1-\frac{v^2}{v_{\text{пред}}^2}\right).$$

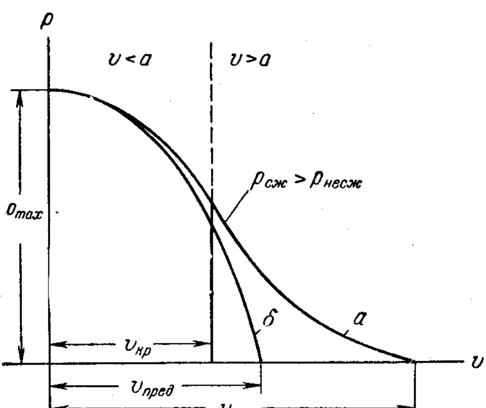

Рис. 2.37. Зависимость давления от скорости: *а* — для струйки газа при адиабатическом течении; *б* — для струйки несжимаемой жидкости (при том же, что и для газа, значении $p_{\max}$).

Зависимость давления от скорости для струйки несжимаемой жидкости изображается, как отсюда видно, параболой, ось которой совпадает с осью p, а вершина находится в точке $p=p_0$; парабола пересекает ось абсцисс в точке $v=v_{\text{пред}}$. Эта парабола также показана на рис. 2.37 (кривая *б*); при малых значениях числа M_∞ она весьма близка к кривой, изображающей зависимость (2.50) для газа.