израсходованная на работу сил трения энергия называется *потерянной энергией*.

Правая часть в уравнении (2.52) так же, как и остальные слагаемые, имеет размерность высоты (линейную); она называется напором, потерянным на трение. Положение, записанное в виде уравнения (2.52), можно теперь сформулировать так: *при установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости без теплообмена разность полных напоров в двух сечениях одной и той же струйки равна напору, потерянному на трение между этими сечениями.*

Для того чтобы вычислить напор, потерянный на трение, нужно знать величину касательного напряжения в каждой точке поверхности выделенной струйки. Природа касательных напряжений в жидкости очень сложна, и их величина зависит от многих обстоятельств, которые мы будем изучать в дальнейшем. Но один важный частный случай мы рассмотрим теперь (в следующем же параграфе), исходя из некоторого эмпирического закона для касательных напряжений, не претендующего на большую точность, но зато весьма простого.

§ 15. Сопротивление цилиндрического трубопровода. Местные сопротивления

Пусть несжимаемая жидкость движется по длинной цилиндрической трубе. Вычислим для этого случая напор, потерянный на трение, рассматривая жидкость, находящуюся в трубе, как струйку, ограниченную внутренней поверхностью трубы. Многочисленными экспериментами, восходящими еще к Гюйгенсу (1690) и Ньютону, можно считать установленным, что при тех размерах труб и скоростях движения, которые обычно применяются в технике, касательные напряжения на поверхности трубы приблизительно пропорциональны плотности жидкости и квадрату средней по сечению скорости ее движения, т. е. иными словами, пропорциональны динамическому давлению. Этот эмпирический закон мы здесь и примем, т. е. будем считать, что

$$\tau_0 = \bar{\tau}_0 \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2};$$

здесь через τ_0 обозначено касательное напряжение на поверхности стенки трубы, через $v_{\text{ср}}$ — средняя по поперечному сечению S скорость, определяемая формулой

$$v_{\text{ср}} = \frac{\int\limits_{(S)} v\, dS}{S},$$

а $\bar{\tau}_0$ есть безразмерный коэффициент пропорциональности (коэффициент трения), зависящий от природы жидкости, состояния поверхности стенок (в частности, от их шероховатости) и от других обстоятельств, о которых речь будет идти в дальнейшем.

Выделим на большом расстоянии от места входа в трубу участок трубы, длина которого равна единице. Так как по всему периметру сечения трубы τ_0 есть величина постоянная, то

$$-k = \frac{\tau_0 f}{S\rho} \cos(\widehat{\tau_0, v}) = -\frac{\tau_0 f}{S\rho},$$

где f есть длина периметра сечения, а S — его площадь. Как следует из уравнения расхода, средняя по сечению скорость есть величина постоянная вдоль цилиндрической трубы; так как участок взят на большом расстоянии от места входа в трубу и вследствие этого распределение скоростей по сечению можно считать одинаковым во всех сечениях, то τ_0 есть также величина постоянная вдоль трубы. Поэтому, вычисляя напор, потерянный на трение, получим:

$$\frac{1}{g} \int\limits_{(1)}^{(2)} k\, ds = \frac{\tau_0 f}{gS\rho} L,$$

где L есть длина участка трубы между первым и вторым сечениями. В случае круглой трубы с диаметром, равным d, $f = \pi d$, $S = \pi d^2/4$ и напор, потерянный на трение, равен

$$4\tau_0 \frac{L}{d\gamma} = 4\bar{\tau}_0 \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} \frac{L}{d} = \lambda \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} \frac{L}{d},$$

где $4\bar{\tau}_0$ обозначено через λ.

Предположим для простоты, что рассматриваемая труба расположена горизонтально. Тогда уравнение (2.52) можно записать в виде

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}. \tag{2.53}$$

Правая часть в последнем уравнении называется *давлением, потерянным на трение*; мы видим, что оно пропорционально динамическому давлению, длине рассматриваемого участка и обратно пропорционально диаметру трубы. Кроме того, потери на трение зависят от величины безразмерного коэффициента λ, который называется *коэффициентом сопротивления* данной трубы. Он зависит от тех же величин, что и коэффициент трения $\bar{\tau}_0$.

Коэффициент сопротивления трубы является ее важнейшей гидродинамической характеристикой: зная коэффициент сопротивления, можно по формуле (2.53) вычислять потери на трение для труб данного типа при любых размерах, скоростях движения и плотности движущейся жидкости.

Как видно из формулы (2.53), коэффициент сопротивления трубы можно определить опытным путем. Для этого следует с помощью двух пьезометров, установленных в начальном и конечном сечениях какого-либо участка трубы (как показано на рис. 2.38), определить разность давлений в этих сечениях по формуле

$$p_1 - p_2 = \gamma (h_1 - h_2),$$

где h_1 и h_2 — высоты уровней жидкости в пьезометрах; кроме того, необходимо измерить расход жидкости Q (см. § 7 настоящей главы) и определить среднюю скорость $v_{ср}$ по формуле $v_{ср} = Q/S$. Так как расстояние между сечениями L, диаметр трубы d и плотность жидкости ρ можно считать известными, то в уравнении (2.53) остается лишь одна неизвестная λ, которая из него и определяется.

Формула (2.53) показывает, что статическое давление непрерывно убывает вдоль трубы по линейному закону. В этом так же можно убедиться на опыте, установив между крайними пьезометрами ряд промежуточных (рис. 2.38).

Формула (2.53) дает основание для моделирования при экспериментальном определении коэффициента сопротивления. Вместо того чтобы определять из опыта коэффициент сопротивления натурального трубопровода (что может оказаться громоздким, а иногда и невыполнимым), можно, как показывает формула (2.53), определить коэффициент сопротивления для трубопровода, геометрически подобного натуральному, но уменьшенных размеров. Если в опыте соблюдены при этом некоторые дополнительные условия, которые будут изложены в дальнейшем, то коэффициент сопротивления λ будет для модели такой же по величине, как и для натурального трубопровода, и значением λ для модели можно воспользоваться при расчете натурального трубопровода.

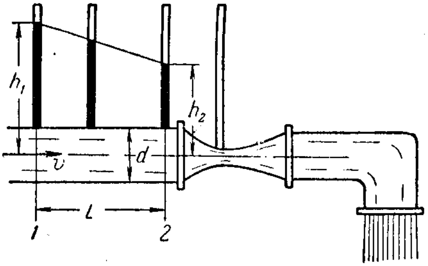

Рис. 2.38. Схема опыта по определению коэффициента сопротивления трубы. Линейный закон падения давления вдоль цилиндрической трубы.

При движении реальной жидкости могут быть потери энергии еще иного рода, нежели рассмотренные до сих пор. Когда жидкость течет по трубе, то потери энергии происходят в основном от касательных напряжений. Однако в реальной жидкости могут быть потери энергии, непосредственно происходящие не только от касательных, но главным образом от нормальных напряжений. Потери энергии, обусловленные касательными напряжениями, при прочих равных условиях тем больше, чем больше поверхность, подвергающаяся трению; при течении по трубе эти потери пропорциональны, как мы видели, длине трубы; иначе они называются поэтому путевыми потерями. Потери энергии, происходящие в основном от нормальных напряжений, сосредоточены обычно на коротком участке потока, зависят главным образом от формы потока (от изменения его поперечного сечения вдоль струек) и называются поэтому местными потерями или местными сопротивлениями.

Рассмотрим конкретный пример местного сопротивления и выясним на этом примере особенности, присущие всем местным сопротивлениям

Представим себе, что в трубе, по которой движется жидкость, находится дроссель (рис. 2.39). Струйки, подходя к дросселю, отклоняются вверх и вниз и устремляются в зазоры между дросселем и стенками трубы с большой скоростью (ибо площадь зазоров меньше площади сечения трубы, а по уравнению расхода количество протекающей за единицу времени жидкости должно быть для всех сечений одинаковым). За дросселем струйки должны быстро расшириться, заполнив все сечение трубы. Быстрое расширение струек характерно для всех местных сопротивлений. При быстром расширении скорость частиц резко уменьшается, происходят столкновения частиц, быстро движущихся, с частицами, которые уже движутся медленно, и возникает обратное движение некоторых частиц по

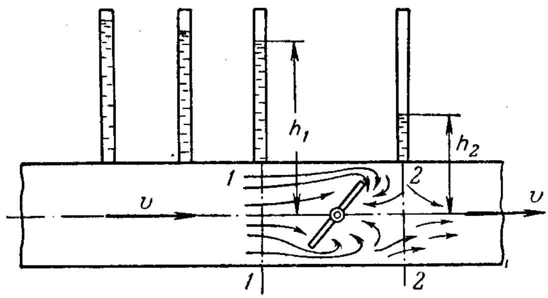

Рис. 2.39. Течение в трубе при наличии местного сопротивления. Схема опыта по определению коэффициента местного сопротивления.

направлению к зазору. Дело в том, что в зазоре, где скорость больше, чем в сечении *22*, взятом за дросселем, давление по уравнению Бернулли меньше, чем в *22*, и эта разность давлений вызывает обратное движение. Наличие вторичного потока, обратного основному, также характерно для всех местных сопротивлений. Вследствие вязкости жидкости струйки основного и вторичного потоков, двигаясь в противоположных направлениях, свертываются в виде вихрей. Вихреобразования за дросселем приводят к пониженным давлениям на его задней стороне, которые вместе с повышенными давлениями на передней стороне создают основную часть сопротивления дросселя. Наличие вихреобразований и связанного с ними сопротивления от нормальных напряжений также характерно для всех местных сопротивлений. На рис. 2.40 изображена картина движения жидкости сквозь задвижку, при сопряжении узкой трубы с широкой и при повороте потока в колене. Везде можно проследить указанные особенности местных сопротивлений.

При количественном определении потери энергии, приходящейся на единицу объема жидкости, протекающей сквозь местное сопротивление, можно считать, как показывают результаты экспериментов, что потеря энергии приблизительно пропорциональна динамическому давлению $\rho v_{\text{ср}}^2/2$. Если обозначить потерю энергии, приходящуюся на единицу объема протекающей жидкости через r, то можно записать:

$$r = \zeta \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2},$$

где ζ есть безразмерный коэффициент, характерный для данного местного сопротивления. Величина коэффициента ζ может быть очень просто определена из эксперимента. Если труба, в которой находится местное сопротивление, цилиндрическая, то, взяв два сечения, как

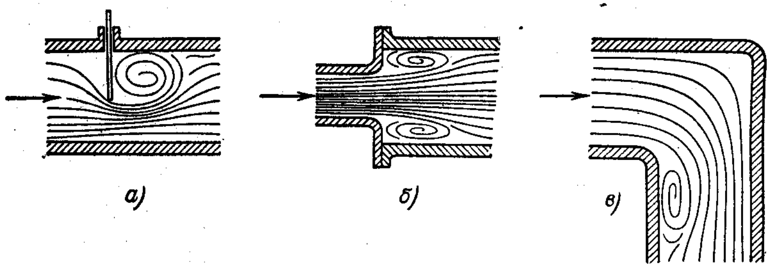

Рис. 2.40. Течение жидкости при наличии местных сопротивлений: *а*) задвижка; *б*) сопряжение узкой трубы с широкой; *в*) колено. Во всех случаях имеют место быстрое расширение потока, обратное течение жидкости и вихреобразование.

показано на рис. 2.39, мы получим по уравнению Бернулли, что разность давлений в этих сечениях равна потерянной на единицу объема энергии, т. е.

$$p_1 - p_2 = \zeta \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}.$$

Для определения коэффициента местного сопротивления ζ один пьезометр устанавливается в сечении *11*, другой — в сечении *22*. Измерение разности уровней $h_1 - h_2$ позволяет определить разность давлений $p_1 - p_2$, а измерение расхода жидкости по трубе — среднюю скорость $v_{\text{ср}}$. Тогда в последнем равенстве остается лишь одно неизвестное ζ, которое из этого равенства может быть определено.

Численные значения коэффициента сопротивления трубопровода λ и коэффициентов местных сопротивлений ζ приводятся в курсах гидравлики, гидравлических и общетехнических справочниках.

Представим себе теперь, что между двумя сечениями трубы находится система, состоящая из последовательно соединенных труб (вообще говоря, разных диаметров и длин) и содержащая ряд местных сопротивлений (рис. 2.41). Если каждое из местных сопротивлений расположено на таком расстоянии от других местных сопротивлений, что их взаимным влиянием можно пренебрегать, то приближенно можно считать потерю энергии во всей системе равной сумме потерь энергии в отдельных ее частях (в этом заключается так называемый ***принцип наложения потерь***). Уравнение энергии для такой системы выражает следующее соотношение: *разность полных энергий единицы объема жидкости в первом и втором сечениях равна сумме потерь энергии на пути между этими сечениями, приходящихся*

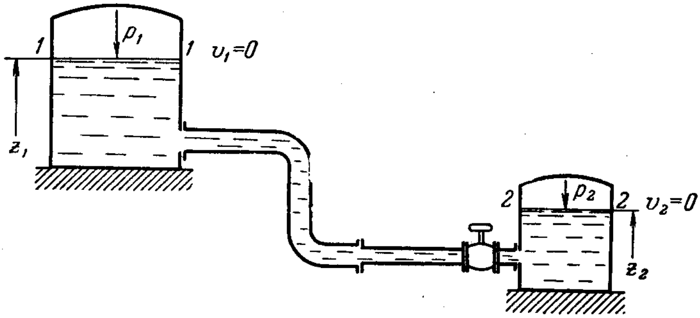

Рис. 2.41. Пример гидравлической системы, содержащей ряд последовательно соединенных путевых и местных сопротивлений.

на единицу объема. В математической записи это соотношение будет выглядеть так:

$$(p_1+\gamma z_1)-(p_2+\gamma z_2)=\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\frac{\rho v_{\text{ср}\,i}^2}{2}\frac{L_i}{d_i}+\sum_{k=1}^{k=m}\zeta_k\frac{\rho v_{\text{ср}\,k}^2}{2}; \tag{2.54}$$

суммирование здесь распространяется на все n прямолинейных участков труб и все m местных сопротивлений, расположенных между первым и вторым сечениями.

§ 16. Уравнение энергии для движения сжимаемой жидкости с потерями и притоком энергий

Рассмотрим теперь более общий случай, когда среда является вязкой и сжимаемой, а процесс неадиабатическим. Возьмем элементарную струйку, в ней — произвольные два сечения и проинтегрируем уравнение энергии в дифференциалах (2.17) вдоль этой струйки от первого сечения до второго (по потоку). Отмечая величины, относящиеся к первому сечению, индексом 1, а величины, относящиеся ко второму сечению, — индексом 2, сможем написать:

$$(U_2-U_1)+\left(\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}\right)+g(z_2-z_1)+\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)+(K_2-K_1)=(Q_2-Q_1).$$

Здесь K_2-K_1 представляет собой работу сил трения между сечениями 1 и 2, а Q_2-Q_1 — количество тепла, подведенного или отведенного от единицы массы протекающей жидкости между теми же сечениями. Случай $Q_2-Q_1>0$ соответствует подводу тепла, случай $Q_2-Q_1<0$ — отводу тепла от выделенной струйки. Аналогично K_2-K_1 можно рассматривать не только как потерю механической энергии, но и как приток энергии, приходящийся на единицу массы; случай $K_2-K_1>0$ соответствует потере энергии, случай $K_2-K_1<0$ — притоку энергии. При течении жидкости по трубам имеет место, как мы видели, потеря энергии; если же между первым и вторым сечениями струйки находится, например, воздушный винт, вращающийся от