аналитически записать *условие кинематического подобия* двух потоков в следующем виде:

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\mathrm{II}}$$

(индексы I и II указывают, к какому потоку относится соответствующая величина).

Если два потока жидкости ограничены геометрически подобными поверхностями и какие-либо из сил, действующих на сходственные элементы, пропорциональны в обоих потоках, то такие потоки называются *динамически подобными* для этих сил. Обозначив, например, силу давления, действующую на какой-либо элементарный объем, через P и силу трения, действующую на тот же объем, через T, сможем записать *условие динамического подобия* для этих сил в следующем виде:

$$\left(\frac{P}{T}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{P}{T}\right)_{\mathrm{II}},$$

(причем в обеих частях равенства величины относятся к сходственным элементам). Иными словами, в случае динамического подобия потоков для сил давления и трения величины сил давления получаются из величин сил трения умножением на постоянный для всего потока множитель.

Так как в жидкости действуют разные силы (давления, трения, тяжести, инерции, упругости и т. д.), то и условий подобия может быть не одно, а несколько: для всяких двух разнородных сил может быть записано свое условие подобия. Каждое такое условие подобия называется условием *частичного подобия*. Если все частичные условия подобия выполняются, то говорят, что имеет место *полное динамическое подобие* потоков.

Возвращаясь к вопросу о коэффициенте сопротивления трубы, мы видим, что этот коэффициент будет одинаков для геометрически подобных труб или неодинаков в зависимости от того, будут ли потоки в этих трубах динамически подобными для сил трения и сил избыточного давления или не будут. Вопрос о постоянстве коэффициента сопротивления труб есть, таким образом, вопрос о динамическом подобии потоков. Обратимся теперь к выводу условий, при которых потоки будут динамически подобными.

§ 3. Условия динамического подобия потоков

Предположим, что два потока I и II (рис. 3.1) кинематически и динамически подобны, и найдем, каким условиям должны удовлетворять при этом их скорости, размеры и другие характерные для потоков величины. Иными словами, выведем *необходимые условия* динамического подобия потоков; достаточность этих условий будет доказана в гл. VI.

Заметим, что если два потока кинематически и динамически подобны, то будут одинаковыми не только соотношения между силами в сходственных точках, но также и соотношения между работами этих сил, выполненными на сходственных участках траекторий. Мы воспользуемся этим обстоятельством для того, чтобы упростить вывод условий подобия. Выражения для работ различных сил входят, как известно (гл. II), в уравнение энергии для элементарной струйки.

Рис. 3.1. Струйки и сходственные элементы в двух потоках, обтекающих геометрически подобные тела.

Рассмотрим сначала несжимаемую жидкость; в этом случае уравнение энергии имеет вид (2.52)

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2+\frac{1}{g}\int\limits_{(1)}^{(2)} k\,ds.$$

Здесь последнее слагаемое представляет собой работу сил трения на участке между первым и вторым сечениями струйки, приходящуюся на единицу веса протекающей жидкости. Аналогично разность z_2-z_1 можно рассматривать как работу силы веса, а разность $p_2/\gamma-p_1/\gamma$ — как работу силы давления на том же участке, причем каждая из этих работ отнесена к единице веса протекающей жидкости. Разность $v_2^2/2g-v_1^2/2g$ можно рассматривать как взятую с обратным знаком работу силы инерции, приходящуюся на единицу веса. В самом деле, если выделить в струйке элементарный объем, проведя в ней два поперечных сечения, то инерционная сила, приходящаяся на единицу его веса и направленная по касательной к траектории, может быть записана в виде $-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$, а ее работа за время dt — в виде $-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}ds$, где ds есть путь, пройденный за то же время центром инерции элементарного объема. Так как

$$-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}ds=-\frac{1}{g}v\,dv,$$

то, интегрируя вдоль струйки от сечения 1 до сечения 2, получим $-\frac{1}{2g}(v_2^2-v_1^2)$.

а) Условие подобия сил трения при ламинарном течении и сил инерции

Выведем условие подобия сил трения и сил инерции.

Возьмем с этой целью отношение работы сил трения к работе инерционных сил. Если два потока динамически подобны, то это отношение должно быть одинаковым для сходственных участков струек, т. е.

$$\left(\frac{\int\limits_{(1)}^{(2)} k\,ds}{v_2^2 - v_1^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\int\limits_{(1)}^{(2)} k\,ds}{v_2^2 - v_1^2}\right)_{\mathrm{II}};$$

здесь индексы I и II означают, что величина относится соответственно к первому или второму потоку. Удельная сила трения k, как известно из предыдущего, пропорциональна касательному напряжению τ и обратно пропорциональна плотности ρ (см. гл. II, § 15); следовательно, и работа этой силы также пропорциональна величине τ/ρ в какой-то промежуточной точке участка 1—2. Разность $v_2^2 - v_1^2$ можно выразить в виде произведения безразмерного коэффициента пропорциональности на квадрат скорости в той же точке. При этом все коэффициенты пропорциональности, вследствие геометрического подобия струек и кинематического подобия потоков, одинаковы для сходственных точек обоих потоков. Поэтому мы можем написать вместо предыдущей пропорции, сокращая эти коэффициенты:

$$\left(\frac{\tau}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\tau}{\rho v^2}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Вопрос о подобии сил трения и сил инерции, таким образом, приводится, как уже указывалось в предыдущем, к вопросу о постоянстве коэффициента трения в двух потоках.

Как известно из физики, *ламинарным* (*слоистым*) движением называется движение, при котором *отдельные струйки текут, не перемешиваясь друг с другом*; по закону Ньютона при ламинарном течении

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n},$$

где μ есть коэффициент вязкости данной среды (см. гл. I, § 8). Подставляя это выражение в предыдущее равенство и заменяя μ/ρ через кинематический коэффициент вязкости ν, получим, что в подобных потоках должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{\nu}{v^2}\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\nu}{v^2}\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Возьмем какой-либо характерный для потока в целом размер L (диаметр трубы, хорду крыла, длину корпуса ракеты и т. д.) и какую-либо характерную для потока скорость V (скорость на оси трубы, скорость полета и т. д.) и представим выражение для коэффициента трения $\nu/v^2 \cdot \partial v/\partial n$ в следующем виде:

$$\frac{\nu}{v^2}\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{V^2}{v^2}\,\frac{\nu}{VL}\,\frac{\partial\left(\frac{v}{V}\right)}{\partial\left(\frac{n}{L}\right)}.$$

Вследствие геометрического подобия поверхностей, ограничивающих рассматриваемые потоки, n/L есть величина постоянная в сходственных точках; в силу кинематического подобия потоков v/V есть величина постоянная в сходственных точках. Следовательно, значения производной $\partial\left(\frac{v}{V}\right)\Big/\partial\left(\frac{n}{L}\right)$ также будут одинаковы в сходственных точках обоих потоков. Из последнего выражения для коэффициента трения видно, что он будет одинаков в обоих потоках лишь в том случае, если величина ν/VL, или, что все равно, обратная ей VL/ν, сохраняет в обоих потоках постоянное значение, т. е. если

$$\left(\frac{VL}{\nu}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{VL}{\nu}\right)_{\mathrm{II}}. \tag{3.1}$$

Это *условие подобия для сил трения и сил инерции называется условием или правилом Рейнольдса* (O. Reynolds, 1883), а безразмерное выражение VL/ν — *числом Рейнольдса.* Оно обозначается через R:

$$\mathsf{R}=\frac{VL}{\nu}. \tag{3.2}$$

Если в двух потоках имеет место подобие сил трения и инерции, то числа Рейнольдса для этих потоков равны между собою

$$\mathsf{R}_{\mathrm{I}}=\mathsf{R}_{\mathrm{II}}. \tag{3.3}$$

При изменении числа Рейнольдса будет изменяться соотношение между силами трения и инерции; следовательно, будет изменяться коэффициент трения и все зависящие от него величины, в частности коэффициент сопротивления трубы λ; таким образом,

$$\lambda=f(\mathsf{R}).$$

Число Рейнольдса представляет собой, как видно из вывода, *величину, пропорциональную отношению сил инерции к силам трения.* Следовательно, отношение чисел Рейнольдса для двух потоков, ограниченных геометрически подобными поверхностями, показывает, во сколько раз отношение сил инерции к силам трения в одном потоке больше или меньше отношения тех же сил в сходственных точках другого потока.

б) Условие подобия сил трения и сил инерции при турбулентном течении

Течение вязкой жидкости может быть *беспорядочным* (*турбулентным*), когда вследствие малой вязкости жидкости и большой подвижности частиц они хаотически движутся по всем направлениям. Турбулентное течение является всегда течением неустановившимся, и для него характерны *пульсации скорости* в каждой точке потока (т. е. нерегулярные изменения скорости по величине и направлению (рис. 3.2)). Скорость в данной точке можно представить в этом случае в виде суммы некоторой средней по времени величины (она называется *осредненной по времени* скоростью и обозначается через $\bar{v}$) и пульсирующего добавка v' (скорость v' называется *пульсационной* скоростью):

$$v = \bar{v} + v'.$$

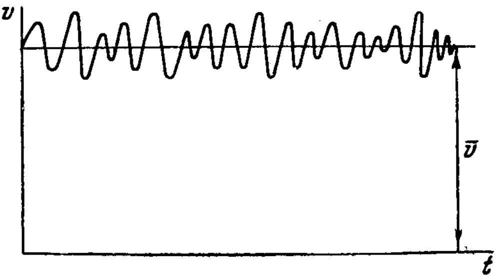

Рис. 3.2. Примерный график изменения скорости в данной точке турбулентного потока с течением времени. На осредненную скорость $\bar{v}$ накладываются пульсации скорости.

Математически осредненная скорость в промежутке времени (t_1, t_2) определяется по теореме о среднем значении в интегральном исчислении как частное от деления интеграла от скорости по времени на величину промежутка времени $t_2 - t_1$:

$$\bar{v} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} v\,dt}{t_2 - t_1}.$$

Из определения осредненной скорости следует, что осредненное значение пульсационной скорости равно нулю.

Можно доказать, что наличие пульсаций скорости в турбулентном потоке приводит к переносу количества движения жидкости из одного слоя потока в другой и к возникновению вследствие этого касательных и нормальных усилий между слоями, дополнительных к тем, которые происходят от вязкости. В дальнейшем (в гл. VI) будет доказано, что если пульсации скорости не стеснены границами потока, то осредненные величины касательных напряжений, возникающих от турбулентного переноса количества движения, пропорциональны плотности среды и осредненному значению квадрата пульсационной скорости:

$$\bar{\tau}_{\text{турб}} \sim \rho \overline{v'^2};$$

черта наверху означает здесь осреднение по времени в том смысле, как это выше объяснено.

В подобных потоках, как было доказано в предыдущем, коэффициенты трения должны быть одинаковы в сходственных точках, т. е.

$$\left(\frac{\tau}{\rho v^2}\right)_{\rm I}=\left(\frac{\tau}{\rho v^2}\right)_{\rm II}.$$

Это соотношение имеет место и для касательных напряжений при ламинарном течении, и, кроме того, для дополнительных касательных напряжений при турбулентном течении. Подставляя сюда вместо $\bar{\tau}_{\text{турб}}$ пропорциональную ему величину $\rho\overline{v'^2}$, получим:

$$\left(\frac{\overline{v'^2}}{v^2}\right)_{\rm I}=\left(\frac{\overline{v'^2}}{v^2}\right)_{\rm II}.$$

Вместо скоростей, характерных для данной точки, введем в это равенство скорости, характерные для потока в целом. Так как в подобных потоках скорости пропорциональны, то мы можем написать:

$$v^2\sim\overline{V}^2,\quad \overline{v'^2}\sim\overline{V'^2},$$

где $\overline{V}$ и V' суть соответственно осредненная скорость и пульсационная скорость потока на бесконечности. Последнее равенство после подстановки этих величин и извлечения квадратного корня из обеих его частей примет вид

$$\left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\overline{V}}\right)_{\rm I}=\left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\overline{V}}\right)_{\rm II}. \tag{3.4}$$

В числителе возведение в степень и извлечение корня не уничтожают друг друга, так как между ними имеется промежуточная операция — осреднение. Это становится совершенно очевидным, если записать выражение $\sqrt{\overline{V'^2}}$ более подробно; по определению осредненной величины

$$\sqrt{\overline{V'^2}}=\sqrt{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}V'^2dt},$$

и следовательно, корень здесь извлекается не из квадрата пульсационной скорости, а из интеграла от ее квадрата.

Равенство (3.4) является *условием подобия для сил турбулентного трения и сил инерции.* Величина $\sqrt{\overline{V'^2}}/\overline{V}$ называется *степенью турбулентности* данного потока и обозначается через ε:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\overline{V}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, в *подобных потоках степени турбулентности равны друг другу*:

$$\varepsilon_{\rm I}=\varepsilon_{\rm II}. \tag{3.6}$$

в) Условие подобия сил тяжести и сил инерции

Рассмотрим теперь силы тяжести и силы инерции и выведем для них условие подобия. Отношение работ этих сил, приходящихся на единицу веса протекающей жидкости, должно быть одинаковым для сходственных участков струек:

$$\left[\frac{g(z_2-z_1)}{v_2^2-v_1^2}\right]_{\text{I}}=\left[\frac{g(z_2-z_1)}{v_2^2-v_1^2}\right]_{\text{II}}.$$

Введем сюда вместо величин z и v, характерных для данной точки, величины L и V, характерные для потока в целом и для ограничивающей его поверхности:

$$\left(\frac{gL}{V^2}\frac{V^2}{v_2^2-v_1^2}\frac{z_2-z}{L}\right)_{\text{I}}=\left(\frac{gL}{V^2}\frac{V^2}{v_2^2-v_1^2}\frac{z_2-z_1}{L}\right)_{\text{II}}.$$

Вследствие геометрического подобия струек отношения $(z_2-z_1)/L$ одинаковы в обоих потоках. В силу кинематического подобия потоков отношения $V^2/(v_2^2-v_1^2)$ также одинаковы в обоих потоках. Как видно из последнего равенства, если имеет место подобие сил тяжести и сил инерции, то должны быть одинаковы в обоих потоках величины V^2/gL, т. е.

$$\left(\frac{V^2}{gL}\right)_{\text{I}}=\left(\frac{V^2}{gL}\right)_{\text{II}}. \tag{3.7}$$

Последнее условие называется *условием* (*или правилом*) *Фруда* (W. Froude, 1870), а безразмерное выражение V^2/gL — *числом Фруда*; оно обозначается через F:

$$\mathsf{F}=\frac{V^2}{gL}. \tag{3.8}$$

Условие Фруда теперь можно записать так:

$$\mathsf{F}_{\text{I}}=\mathsf{F}_{\text{II}}. \tag{3.9}$$

Отношение чисел Фруда для двух потоков, ограниченных геометрически подобными поверхностями, представляет собой, таким образом, величину, которая показывает, во сколько раз отношение сил инерции к силам тяжести в одном потоке больше или меньше отношения тех же сил в сходственных точках другого потока.

г) Условие подобия сил давления в несжимаемой среде и сил инерции

Рассмотрим теперь силы давления и силы инерции и выведем для них условие подобия. Отношение работ этих сил должно быть одинаковым на сходственных участках траекторий:

$$\left[\frac{p_2-p_1}{\rho(v_2^2-v_1^2)}\right]_{\text{I}}=\left[\frac{p_2-p_1}{\rho(v_2^2-v_1^2)}\right]_{\text{II}}.$$

Перейдем здесь от величин, характерных для данной точки, к величинам, характерным для всего потока и ограничивающей его поверхности. Возьмем какие-либо две определенные точки в потоке, например точку на бесконечности, где давление равно p_∞, и точку на поверхности тела, где давление равно p, и представим условие подобия в следующем виде:

$$\left[\frac{p_2-p_1}{p-p_\infty}\frac{V_\infty^2}{v_2^2-v_1^2}\frac{p-p_\infty}{\rho V_\infty^2}\right]_{\mathrm{I}}=\left[\frac{p_2-p_1}{p-p_\infty}\frac{V_\infty^2}{v_2^2-v_1^2}\frac{p-p_\infty}{\rho V_\infty^2}\right]_{\mathrm{II}}.$$

Вследствие кинематического подобия рассматриваемых потоков отношения $V_\infty^2/(v_2^2-v_1^2)$ одинаковы в сходственных точках. Вследствие динамического подобия отношение разностей давления $(p_2-p_1)/(p-p_\infty)$ также одинаково в сходственных точках обоих потоков. Следовательно, если в двух потоках имеет место подобие сил давления и сил инерции, то должно быть одинаковым в обоих потоках отношение $(p-p_\infty)/\rho V_\infty^2/2$:

$$\left(\frac{p-p_\infty}{\rho V_\infty^2/2}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{p-p_\infty}{\rho V_\infty^2/2}\right)_{\mathrm{II}}. \tag{3.10}$$

Условие подобия, выражаемое последним равенством, называется *условием подобия Эйлера*, а безразмерная величина $(p-p_\infty)/\rho V_\infty^2/2$ называется *коэффициентом давления* в данной точке или *числом Эйлера* и обозначается через $\bar{p}$ или E. Предыдущее равенство можно поэтому записать в виде

$$\bar{p}_{\mathrm{I}}=\bar{p}_{\mathrm{II}} \qquad \text{или} \qquad E_{\mathrm{I}}=E_{\mathrm{II}}. \tag{3.11}$$

Вопрос о подобии сил давления и сил инерции в двух потоках приводится, таким образом, к вопросу о постоянстве коэффициентов давления в сходственных точках этих потоков. Выясним, при каких условиях коэффициент давления в сходственных точках будет одинаковым в обоих потоках.

Разделив уравнение энергии для несжимаемой жидкости (2.52) почленно на $(v_2^2-v_1^2)/2g$, получим:

$$\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(v_2^2-v_1^2)}=-1-\frac{2(z_2-z_1)g}{v_2^2-v_1^2}-\frac{2\int\limits_{(1)}^{(2)}k\,ds}{v_2^2-v_1^2}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой величину, пропорциональную коэффициенту давления $\bar{p}$. В правой части второе слагаемое является величиной, пропорциональной числу Фруда F, а третье слагаемое — величиной, зависящей от числа Рейнольдса R и от степени турбулентности потока ε. Таким образом, мы приходим к выводу, что *в несжимаемой вязкой среде коэффициент давления $\bar{p}$ (или число Эйлера) зависит от чисел Фруда и Рейнольдса и от степени турбулентности* ε:

$$\bar{p}_{\text{несж}}=F(\mathsf{R},\ \mathsf{F},\ \varepsilon).$$

Если числа Рейнольдса и Фруда и степени турбулентности одинаковы в двух потоках, ограниченных геометрически подобными поверхностями, то в сходственных точках этих потоков будут одинаковы коэффициенты давления.

д) Условие подобия сил давления в сжимаемой среде и сил инерции

Рассмотрим теперь сжимаемую среду и выведем условие подобия для сил инерции и сил давления. Так как здесь нас не будут интересовать ни силы трения, ни силы тяжести, то мы предположим среду идеальной, тепловой процесс адиабатическим, силами тяжести будем пренебрегать и уравнение энергии возьмем в виде (2.36):

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\gamma_1}=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\gamma_2}.$$

Здесь разность $(v_2^2-v_1^2)/2g$ представляет собой работу инерционных сил, а разность $p_2/\gamma_2-p_1/\gamma_1$ пропорциональна работе сил давления, приходящейся на единицу веса газа. Если два потока газа подобны, то отношение этих работ на сходственных участках траектории должно быть одинаковым:

$$\left(\frac{v_2^2-v_1^2}{\dfrac{p_2}{\rho_2}-\dfrac{p_1}{\rho_1}}\right)_{\text{I}}=\left(\frac{v_2^2-v_1^2}{\dfrac{p_2}{\rho_2}-\dfrac{p_1}{\rho_1}}\right)_{\text{II}}.$$

Перейдем здесь от величин, характерных для данной точки, к величинам, характерным для потока в целом. Вследствие кинематического подобия потоков разность $v_2^2-v_1^2$ пропорциональна V_∞^2, а вследствие подобия поля давлений и плотностей разность $p_2/\rho_2-p_1/\rho_1$ пропорциональна p_∞/ρ_∞, причем коэффициенты пропорциональности одинаковы для сходственных участков траекторий. Поэтому, сокращая эти коэффициенты в обеих частях последнего равенства, получим из него следующее соотношение:

$$\left(\frac{V_\infty^2}{p_\infty/\rho_\infty}\right)_{\text{I}}=\left(\frac{V_\infty^2}{p_\infty/\rho_\infty}\right)_{\text{II}},$$

Так как по формуле (2.25)

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty}=\frac{a_\infty^2}{k},$$

то, полагая показатель адиабаты одинаковым в среде I и среде II, получаем следующее *условие подобия сил давления и сил инерции в сжимаемой среде*:

$$\left(\frac{V_\infty}{a_\infty}\right)_{\text{I}}=\left(\frac{V_\infty}{a_\infty}\right)_{\text{II}}. \tag{3.12}$$

Это условие подобия мы будем называть *условием подобия Маиевского* в честь известного русского ученого Н. В. Маиевского, который в 1882 г., исследуя сопротивление воздуха при полете артиллерийских снарядов, установил зависимость сопротивления от отношения V_∞/a_∞ [1]). Отношение V_∞/a_∞ обозначается буквой M_∞. Условие подобия (3.12) можно поэтому записать в виде

$$\mathsf{M}_\mathrm{I} = \mathsf{M}_\mathrm{II}. \tag{3.13}$$

Таким образом, *число* M *является* не только характеристикой сжимаемости потока газа (гл. II, § 9), но также *критерием динамического подобия для сил давления и инерции.*

Коэффициент давления $\bar{p}$ *в сжимаемой среде зависит* не только от чисел Фруда и Рейнольдса и степени турбулентности потока, но *также и от числа* M. В самом деле, по уравнению энергии для сжимаемой среды

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\gamma} = \frac{V_\infty^2}{2g} + \frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\gamma_\infty};$$

отсюда находим:

$$\frac{p}{\gamma}\frac{\gamma_\infty}{p_\infty} = 1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{kp_\infty} - \frac{\rho_\infty v^2}{kp_\infty}\right) = 1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{v^2}{a_\infty^2}\right).$$

Так как при адиабатическом процессе

$$\frac{\gamma_\infty}{\gamma} = \left(\frac{p_\infty}{p}\right)^{\frac{1}{k}},$$

то

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{v^2}{a_\infty^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Вычислим теперь коэффициент давления:

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2}\left[1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{v^2}{a_\infty^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} =$$

$$= \frac{2}{k}\frac{a_\infty^2}{V_\infty^2}\left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\left(1 - \frac{v^2}{V_\infty^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} - \frac{2}{k}\frac{a_\infty^2}{V_\infty^2} =$$

$$= \frac{2}{k}\frac{1}{\mathsf{M}_\infty^2}\left[1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_\infty^2\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} - \frac{2}{k}\frac{1}{\mathsf{M}_\infty^2}.$$

Вследствие кинематического подобия потоков, отношение v/V_∞ есть величина одинаковая в сходственных точках обоих потоков. Поэтому

---

[1]) Маиевский Н. В., О решении задач прицельной и навесной стрельбы (из Артиллерийского журнала № 9—11 за 1882 г.), С.-Петербург, 1882.

числа Эйлера $\bar{p}$ в сжимаемой среде будут одинаковы для двух потоков (у которых величина k одна и та же), если одинаковы числа M_∞. Если же числа M_∞ разные у потоков, ограниченных геометрически подобными поверхностями, то в сходственных точках таких потоков $\bar{p}_{\text{сж}} = F(\mathsf{M}_\infty)$.

Аналогично можно доказать, что и коэффициент трения в сжимаемой среде является функцией числа M: $\bar{\tau}_{\text{сж}} = f(\mathsf{M}_\infty)$.

Таким образом, в вязкой сжимаемой среде при установившемся течении

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} &= F(\mathsf{R}, \mathsf{M}, \mathsf{F}, \varepsilon), \\ \bar{\tau} &= f(\mathsf{R}, \mathsf{M}, \mathsf{F}, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

е) Условие подобия сил инерции при неустановившемся движении

Мы рассматривали до сих пор силы давления, трения, тяжести и инерции в установившемся потоке. Если два динамически подобных потока являются неустановившимися, то, кроме вышеизложенных условий подобия, должно выполняться еще одно условие, имеющее чисто кинематический характер.

В случае неустановившегося движения скорость $\boldsymbol{v}$ в данной точке изменяется с течением времени; следовательно, скорость частицы зависит от координат точки x, y, z и от времени t:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x, y, z, t).$$

При движении частицы ее координаты изменяются, т. е. являются функциями t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

По известному из математики правилу дифференцирования сложной функции находим, что ускорение частицы равно

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Так как $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, $dz/dt = v_z$, то ускорение можно представить в виде

$$\frac{dv}{dt} = v_x\frac{\partial v}{\partial x} + v_y\frac{\partial v}{\partial y} + v_z\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Здесь первые три слагаемых происходят от изменения координат частицы; эти слагаемые существуют и при установившемся движении. Последнее слагаемое происходит от изменения скорости в данной точке с течением времени и имеет место только при неустановившемся движении. Если два потока I и II динамически подобны, то отношение величины инерционной силы, происходящей от перемещения частицы, к величине инерционной силы, происходящей от нестационарности потока, должно быть одинаковым в сходственных точках обоих потоков и в сходственные моменты времени, т. е. должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\left|v_x\frac{\partial v}{\partial x}+v_y\frac{\partial v}{\partial y}+v_z\frac{\partial v}{\partial z}\right|}{\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|}\right)_{\rm I}=\left(\frac{\left|v_x\frac{\partial v}{\partial x}+v_y\frac{\partial v}{\partial y}+v_z\frac{\partial v}{\partial z}\right|}{\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|}\right)_{\rm II}.$$

Перейдем в этой пропорции от величин, характерных для данной точки, к величинам, характерным для потока в целом. Вследствие кинематического подобия потоков скорости v_x, v_y, v_z пропорциональны V, причем коэффициенты пропорциональности одинаковы в сходственных точках и для сходственных моментов времени. Вследствие кинематического и геометрического подобия потоков производные от $\boldsymbol{v}$ по координатам пропорциональны V/L и коэффициенты пропорциональности также одинаковы в сходственных точках и для сходственных моментов времени. Поэтому

$$v_x\frac{\partial v}{\partial x}+v_y\frac{\partial v}{\partial y}+v_z\frac{\partial v}{\partial z}\sim\frac{V^2}{L}.$$

Выбирая какой-либо промежуток времени T, характерный для рассматриваемого движения, и выражая Δt через T с помощью безразмерного коэффициента пропорциональности, одинакового для сходственных моментов времени, найдем, что $\partial v/\partial t\sim V/T$. Подставляя найденные выражения в исходную пропорцию и сокращая величины, состоящие из одинаковых коэффициентов пропорциональности, получаем следующее *условие подобия для сил инерции в неустановившемся потоке*:

$$\left(\frac{VT}{L}\right)_{\rm I}=\left(\frac{VT}{L}\right)_{\rm II}. \tag{3.16}$$

Это условие подобия называется *условием* (*или правилом*) *Струхала* (V. Strouhal, 1878), а безразмерная величина VT/L — *числом Струхала* и обозначается через S:

$$\mathsf{S}=\frac{VT}{L}. \tag{3.17}$$

Особое значение имеет правило подобия Струхала для периодических движений в жидкости, например для движения, вызванного звучащей струной, движущейся со скоростью V (как в опытах самого Струхала), для движения, вызванного вращающимся воздушным винтом, имеющим поступательную скорость V, и т. д. В этих случаях за характерный промежуток времени принимается период явления или, например, для воздушных винтов — время одного оборота винта. Обычно в этих случаях вместо периода T вводят обратную ему величину n, т. е. такую, что

$$nT=1.$$

Нетрудно видеть, что, например, для струны n есть число колебаний в секунду, для воздушного винта — число оборотов в секунду (оно обозначается также через n_s, для того чтобы не смешивать его с числом оборотов в минуту). В качестве характерной длины для воздушных винтов принимается диаметр винта D. Условие подобия Струхала для воздушных винтов принимает после введения этих обозначений следующий вид:

$$\left(\frac{V}{n_s D}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{V}{n_s D}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Число Струхала

$$\mathsf{S} = \frac{V}{n_s D}$$

обозначается в теории воздушных винтов буквой λ и называется *относительной поступью винта* или *коэффициентом скорости* (или режимом работы винта). Все характеристики семейства геометрически подобных воздушных винтов: коэффициент тяги, коэффициент мощности, коэффициент полезного действия — будут одинаковы, если одинаков у всех винтов режим работы λ. При разных режимах работы все характеристики семейства геометрически подобных винтов являются функциями λ.

ж) Условие подобия аэродинамических сил и сил упругости

Иногда, кроме подобия сил, действующих в жидкости, должно соблюдаться также подобие сил аэродинамических и сил упругости обтекаемых тел (например, при изучении на моделях вибраций крыльев или винтов). В этих случаях модули упругости при растяжении или сжатии E (модули Юнга) обоих тел должны быть связаны со скоростями потока и плотностью среды следующим соотношением:

$$\frac{\rho V^2}{E} = \mathrm{const}$$

для обоих потоков, т. е.

$$\left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Это правило называется *правилом подобия Коши* (Cauchy, 1822), а безразмерная величина $\rho V^2/E$ — *числом Коши* и обозначается через C.

Для того чтобы вывести правило Коши, следует вспомнить из сопротивления материалов формулу для величины относительного объемного растяжения или сжатия упругого тела ε, вызываемого всесторонним давлением $p - p_\infty$:

$$\varepsilon = \pm \frac{3(p - p_\infty)}{E}(1 - 2\sigma),$$

где σ — коэффициент поперечного сжатия (коэффициент Пуассона). В случае, если силы давления потока и силы упругости тел подобны, то относительная объемная деформация должна быть для тела, находящегося в потоке I, такой же, как и для тела, находящегося в потоке II. Так как обычно коэффициент Пуассона можно считать одинаковым для обоих тел, то отсюда получаем равенство

$$\left(\frac{p-p_\infty}{E}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{p-p_\infty}{E}\right)_{\mathrm{II}}$$

в сходственных точках обоих потоков. Но избыточные давления в несжимаемой жидкости пропорциональны $\rho V^2/2$; следовательно, должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Изложенными здесь условиями подобия не исчерпываются все вообще условия механического подобия, с которыми приходится иметь дело в аэродинамике. Всякий физический фактор, влияющий на характер протекания явления, приводит в результате учета его взаимодействия с другими факторами к соответствующему условию подобия.

Практическое значение изложенных в этом параграфе условий динамического подобия потоков заключается в том, что они позволяют установить, от каких безразмерных параметров зависят аэродинамические коэффициенты для тел данной формы. Так, например, мы видели, что коэффициенты давления и трения в сходственных точках зависят от чисел R, M, F и ε, коэффициент сопротивления трубопровода λ зависит от числа R и т. д.

Условия подобия являются основой для научно поставленного эксперимента. Они позволяют правильно моделировать явление, т. е. проводить опыт не с натуральным объектом (что, как уже указывалось ранее, зачастую бывает практически невозможным), а с его моделью, причем проводить так, чтобы результат опыта с моделью был такой же (в безразмерных коэффициентах), каким был бы результат опыта с натуральным объектом.

Условия подобия позволяют, кроме того, правильно обрабатывать результаты опытов. Устанавливая, например, что для трубопроводов $\lambda=f(\mathsf{R})$, теория подобия указывает, что обработка опытных данных о коэффициентах сопротивления трубопроводов должна проводиться по числу Рейнольдса, а не по диаметрам, скоростям или вязкости, как это делалось в гидравлике ранее.

§ 4. Условия теплового подобия потоков

В связи с резким увеличением скорости полета значительно расширился в последнее время круг физических явлений, изучаемых аэродинамикой. В число этих явлений должны быть включены теперь нагрев газа вблизи поверхности летящего тела и передача тепла от