где σ — коэффициент поперечного сжатия (коэффициент Пуассона). В случае, если силы давления потока и силы упругости тел подобны, то относительная объемная деформация должна быть для тела, находящегося в потоке I, такой же, как и для тела, находящегося в потоке II. Так как обычно коэффициент Пуассона можно считать одинаковым для обоих тел, то отсюда получаем равенство

$$\left(\frac{p-p_\infty}{E}\right)_\mathrm{I}=\left(\frac{p-p_\infty}{E}\right)_\mathrm{II}$$

в сходственных точках обоих потоков. Но избыточные давления в несжимаемой жидкости пропорциональны $\rho V^2/2$; следовательно, должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_\mathrm{I}=\left(\frac{\rho V^2}{E}\right)_\mathrm{II}.$$

Изложенными здесь условиями подобия не исчерпываются все вообще условия механического подобия, с которыми приходится иметь дело в аэродинамике. Всякий физический фактор, влияющий на характер протекания явления, приводит в результате учета его взаимодействия с другими факторами к соответствующему условию подобия.

Практическое значение изложенных в этом параграфе условий динамического подобия потоков заключается в том, что они позволяют установить, от каких безразмерных параметров зависят аэродинамические коэффициенты для тел данной формы. Так, например, мы видели, что коэффициенты давления и трения в сходственных точках зависят от чисел R, M, F и ε, коэффициент сопротивления трубопровода λ зависит от числа R и т. д.

Условия подобия являются основой для научно поставленного эксперимента. Они позволяют правильно моделировать явление, т. е. проводить опыт не с натуральным объектом (что, как уже указывалось ранее, зачастую бывает практически невозможным), а с его моделью, причем проводить так, чтобы результат опыта с моделью был такой же (в безразмерных коэффициентах), каким был бы результат опыта с натуральным объектом.

Условия подобия позволяют, кроме того, правильно обрабатывать результаты опытов. Устанавливая, например, что для трубопроводов $\lambda=f(\mathsf{R})$, теория подобия указывает, что обработка опытных данных о коэффициентах сопротивления трубопроводов должна проводиться по числу Рейнольдса, а не по диаметрам, скоростям или вязкости, как это делалось в гидравлике ранее.

§ 4. Условия теплового подобия потоков

В связи с резким увеличением скорости полета значительно расширился в последнее время круг физических явлений, изучаемых аэродинамикой. В число этих явлений должны быть включены теперь нагрев газа вблизи поверхности летящего тела и передача тепла от газа к телу. Законы теплопередачи при больших скоростях движения тела в газовой среде, способы управления потоками тепла и, в частности, способы охлаждения поверхности тела изучаются в недавно возникшей науке, которая называется аэротермодинамикой.

Мы рассмотрим в этом параграфе законы подобия, которым подчиняются явления передачи тепла.

Из курса теплотехники известно, что передача тепла от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой и распространение тепла в нагреваемом теле могут происходить тремя способами: непосредственным соприкосновением двух тел (в результате их теплопроводности); в жидкостях и газах, кроме того, конвекцией, т. е. перемещением более нагретых масс на место менее нагретых, и, наконец, лучеиспусканием, т. е. в результате преобразования тепловой энергии в лучистую. Количество тепла, которое проходит в единицу времени вследствие теплопроводности сквозь площадку dS соприкосновения двух тел, выражается законом Фурье:

$$dQ_T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS,$$

где λ представляет собой коэффициент теплопроводности, а $\partial T/\partial n$ является температурным градиентом по нормали к площадке.

Коэффициент теплопроводности, как видно из последнего равенства, измеряется в *вт/м·град*; эта величина зависит от материала тела, а у жидкостей и газов, кроме того, от температуры и давления. Для воздуха зависимость λ от температуры и давления представлена на рис. 1.11 $\left(1 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} = 4180 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}\right)$.

Количество тепла, которое проходит в единицу времени вследствие конвекции сквозь площадку dS, проведенную в жидкой или газообразной среде, равно произведению массового расхода через эту площадку на количество тепла, заключенное в единице массы, т. е. на $c_p T$:

$$dQ_k = \rho v_n \, dS \, c_p T.$$

Здесь c_p есть коэффициент теплоемкости при постоянном давлении, который также зависит от температуры и давления (рис. 1.10).

Для того чтобы применить последние две формулы, необходимо знать распределение температуры и скорости в воздушной среде, окружающей тело. Так как на практике температурное и скоростное поле вокруг тела далеко не всегда бывает известным, то для расчета теплоотдачи применяют иную формулу, которая не требует знания поля температуры и скорости, но содержит экспериментально определяемый коэффициент теплоотдачи α. Здесь полная аналогия с законом Ньютона и квадратичным законом для касательных напряжений: как известно, в формулу квадратичного закона входит экспериментально определяемый коэффициент трения $\bar{\tau}$. Суммарное количество тепла, которое в единицу времени переходит от среды к телу (или от тела к среде) вычисляют по формуле

$$dQ = \alpha\,(T_{\text{ср}} - T_{\text{пов}})\,dS.$$

Здесь $T_{\text{ср}}$ есть температура среды, окружающей тело, $T_{\text{пов}}$ — температура на поверхности тела в данном месте, α — коэффициент теплоотдачи. Величина α зависит от многих обстоятельств: природы среды и материала тела, скорости и режима течения вблизи поверхности, от формы поверхности и т. д.

Если для двух геометрически подобных тел имеет место тепловое подобие, то соотношение между dQ и dQ_T должно быть одинаковым в сходственных точках поверхности обоих тел. Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\alpha\,(T_{\text{ср}} - T_{\text{пов}})}{\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}}\right]_{\text{I}} = \left[\frac{\alpha\,(T_{\text{ср}} - T_{\text{пов}})}{\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}}\right]_{\text{II}}.$$

Так как температурные поля подобны, то вводя характерную разность температур ΔT и характерный размер тела L, сможем написать, что

$$T_{\text{ср}} - T_{\text{пов}} \sim \Delta T, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \sim \frac{\Delta T}{L},$$

причем коэффициент пропорциональности одинаков в сходственных точках. Переходя в последнем равенстве к величинам, характерным для тела и среды, и сокращая одинаковые коэффициенты пропорциональности, получим, что в условиях теплового подобия

$$\left(\frac{\alpha L}{\lambda}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{\alpha L}{\lambda}\right)_{\text{II}}. \tag{3.18}$$

Это условие подобия называется *условием подобия Нуссельта* (Nusselt, 1910), а безразмерная величина

$$\text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} \tag{3.19}$$

— *числом Нуссельта*. Если имеет место подобие условий теплообмена, то

$$\text{Nu}_{\text{I}} = \text{Nu}_{\text{II}}.$$

Если температурные поля в двух потоках, обтекающих геометрически подобные тела, подобны, то должно быть одинаковым в сходственных точках также отношение количеств тепла, которые проходят в единицу времени сквозь элементарную площадку в результате теплопроводности и в результате конвекции. Это означает, что в сходственных точках

$$\left(\frac{\rho v_n c_p T}{\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{\rho v_n c_p T}{\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}}\right)_{\text{II}}.$$

Переходя здесь от величин, характерных для данной точки, к величинам, характерным для тела и потока в целом, получим, что в случае теплового подобия имеет место равенство

$$\left(\frac{V\rho c_p L}{\lambda}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{V\rho c_p L}{\lambda}\right)_{\mathrm{II}}.$$

Безразмерная величина $V\rho c_p L/\lambda$ называется *числом Пекле* (Péclet) и обозначается через Pe:

$$\mathsf{Pe} = \frac{V\rho c_p L}{\lambda}.$$

Равенство чисел Пекле для двух потоков является условием подобия температурных полей:

$$\mathsf{Pe}_{\mathrm{I}} = \mathsf{Pe}_{\mathrm{II}}.$$

Величину $\lambda c_p/\rho$ называют иногда *коэффициентом температуропроводности* данного газа и обозначают через a:

$$a = \frac{\lambda c_p}{\rho}.$$

Введя эту величину, можно записать число Пекле в виде

$$\mathsf{Pe} = \frac{VL}{a},$$

который показывает, что число Пекле построено по тому же типу, что и число Рейнольдса; отличие от числа Рейнольдса состоит лишь в том, что вместо коэффициента кинематической вязкости ν здесь входит коэффициент температуропроводности a.

Если в двух потоках, обтекающих геометрически подобные тела, имеет место подобие как температурных, так и скоростных полей, то для этих потоков одинаковы и числа Пекле и числа Рейнольдса. Следовательно, в этом случае будут одинаковыми для обоих потоков и отношения этих чисел Pe/R. Отношение чисел Пекле и Рейнольдса называется числом Прандтля (Prandtl) и обозначается через Pr:

$$\mathsf{Pr} = \frac{\mathsf{Pe}}{\mathsf{R}} = \frac{c_p \mu}{\lambda}.$$

Можно рассматривать *число Прандтля* как величину, характеризующую *отношение количества тепла, выделившегося в результате вязкого трения, к количеству тепла, отведенному в результате теплопроводности.* Следует отметить, что, в отличие от чисел Рейнольдса и Пекле, число Прандтля зависит только от физических свойств среды и не зависит от размеров тела и скорости его движения. Для воздуха и других двухатомных газов число Прандтля при малых температурах равно приблизительно $0{,}72 \div 0{,}75$, при больших — $0{,}6 \div 0{,}65$, для трехатомных газов — $0{,}85$, для водяного пара при малых давлениях Pr находится в пределах $1{,}0 \div 1{,}1$, при больших давлениях и вблизи точки насыщения число Pr увеличивается, приближаясь к 2.

Условия Рейнольдса и Пекле являются не только необходимыми, но и достаточными условиями подобия, т. е. если они выполняются, то в потоках вязкой несжимаемой жидкости будет иметь место динамическое и тепловое подобие. В этом случае будут одинаковы и условия теплоотдачи, т. е. будут одинаковы числа Нуссельта. Но если при обтекании геометрических подобных тел R или Pe, или оба эти числа разные, то будут, вообще говоря, разными и числа Nu. Таким образом, для геометрически подобных тел

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{R},\ \mathrm{Pe}),$$

или

$$\mathrm{Nu} = F(\mathrm{R},\ \mathrm{Pr}).$$

Вид этой зависимости различен для разных тел.

§ 5. Полное и частичное подобие. Способы осуществления динамического подобия при испытании моделей

Из теории динамического подобия, изложенной в предыдущих параграфах, следует, что аэродинамические коэффициенты (давления и трения) у двух геометрически подобных тел будут одинаковы, если при движении этих тел в воздушной среде без теплоотдачи одновременно выполняются условия подобия Рейнольдса, Маиевского, Фруда, Струхала и равенство степеней турбулентности, т. е. если

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{VL}{\nu}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{VL}{\nu}\right)_{\mathrm{II}}, \qquad \left(\frac{V}{a}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{V}{a}\right)_{\mathrm{II}}, \\ &\left(\frac{V^2}{gL}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{V^2}{gL}\right)_{\mathrm{II}}, \quad \left(\frac{VT}{L}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{VT}{L}\right)_{\mathrm{II}}, \quad \left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\overline{V}}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\overline{V}}\right)_{\mathrm{II}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Теоретически мы имеем в первых трех уравнениях три неизвестные величины, определяющие условия эксперимента: скорость потока, характерный размер модели и одну из физических констант, характеризующих природу среды, т. е. ν или a. Таким образом, можно определить условия эксперимента так, чтобы были выполнены совместно условия подобия Рейнольдса, Фруда и Маиевского. Однако при действительном проведении эксперимента дело обстоит совсем иначе. Натуральные летательные аппараты имеют в настоящее время настолько большие размеры, что экспериментировать приходится, как правило, с моделями, уменьшенными по сравнению с натурой. Если величины, относящиеся к натуральному объекту, отмечать значком 1, а величины, относящиеся к модели, — значком 2, то можно считать, что, как правило, $L_2 < L_1$. Предположим, кроме того, что как экспе-