В связанной системе координат проекции аэродинамической силы $\boldsymbol{R}$ называются: X_1 — продольной силой, Y_1 — нормальной силой, Z_1 — поперечной силой. Проекции аэродинамического момента $\boldsymbol{M}$ в той же системе координат называются M_{x1} — момент крена, M_{y1} — момент рысканья, M_{z1} — момент тангажа.

Если известны составляющие аэродинамической силы и аэродинамического момента в одной из систем координат, то, зная угол атаки α и угол скольжения β, можно определить их составляющие в другой системе. Наиболее часто приходится от скоростной системы переходить к связанной. В простейшем случае, когда угол скольжения $\beta = 0$, формулы для перехода от проекций аэродинамической силы в скоростной системе к ее проекциям в связанной имеют вид (рис. 3.43):

$$Q_1 = Q\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$Y_1 = Q\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$
$$Z_1 = Z.$$

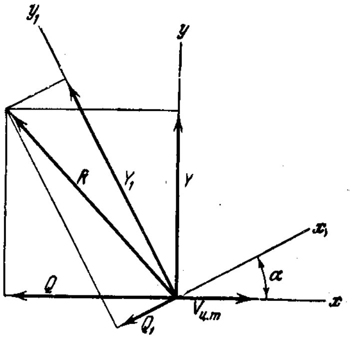

Рис. 3.43. Переход от скоростной системы к связанной.

Переходные формулы для проекций аэродинамического момента имеют вид:

$$M_{x1} = M_x\cos\alpha + M_y\sin\alpha,$$
$$M_{y1} = M_y\cos\alpha - M_x\sin\alpha,$$
$$M_{z1} = M_z.$$

Отсюда нетрудно получить формулы и для обратного перехода от связанной системы к скоростной.

§ 12. Основные формулы для аэродинамической силы и аэродинамического момента. Коэффициенты сопротивления

Выясним, какова зависимость между аэродинамической силой и основными величинами, характеризующими движущееся тело и среду (к таким величинам относятся размеры тела, скорость его движения, плотность среды и т. д.).

Запишем в математической форме определение аэродинамической силы как результирующей сил давления и сил трения, распределенных по поверхности тела. Выделим на поверхности тела Σ элементарную площадку $d\Sigma$. При движении тела в среде на нее будет действовать нормальная к площадке сила $\boldsymbol{p}\,d\Sigma$ и касательная к площадке сила $\boldsymbol{\tau}\,d\Sigma$. Спроектируем эти силы на оси скоростной системы координат; проекция на ось x сил, приложенных к площадке $d\Sigma$, равна

$$[p\cos(\boldsymbol{p},\ x) + \tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ x)]\,d\Sigma.$$

Аналогично запишутся выражения для проекций тех же сил соответственно на оси y и z:

$$[p\cos(\boldsymbol{p},\ y)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ y)]\,d\Sigma,$$
$$[p\cos(\boldsymbol{p},\ z)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ z)]\,d\Sigma.$$

Проинтегрировав эти выражения по всей поверхности тела Σ, получим формулы соответственно для сил лобового сопротивления, подъемной и боковой:

$$\left.\begin{aligned} Q=-X&=-\int_{(\Sigma)}[p\cos(\boldsymbol{p},\ x)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ x)]\,d\Sigma,\\ Y&=\int_{(\Sigma)}[p\cos(\boldsymbol{p},\ y)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ y)]\,d\Sigma,\\ Z&=\int_{(\Sigma)}[p\cos(\boldsymbol{p},\ z)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ z)]\,d\Sigma. \end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

Для дальнейшего удобно ввести в эти формулы вместо абсолютного давления p избыточное $p-p_\infty$, где p_∞ есть давление в бесконечно удаленной точке. С этой целью заметим, что так как поверхность тела Σ замкнута, то интегралы

$$\int_{(\Sigma)}p_\infty\cos(\boldsymbol{p},\ x)\,d\Sigma,\qquad \int_{(\Sigma)}p_\infty\cos(\boldsymbol{p},\ y)\,d\Sigma,\qquad \int_{(\Sigma)}p_\infty\cos(\boldsymbol{p},\ z)\,d\Sigma$$

равны нулю. В самом деле, например, $d\Sigma\cos(\boldsymbol{p},\ x)$ представляет собой проекцию площадки $d\Sigma$ на плоскость, перпендикулярную к оси x; так как поверхность Σ замкнутая, то проектирующие линии вырежут из нее другую площадку, проекция которой на плоскость, перпендикулярную к оси x, будет иметь такую же абсолютную величину, как и проекция $d\Sigma$, но обратный знак. Поэтому, суммируя все такие проекции, получим нуль. Аналогично можно обнаружить, что и два других интеграла равны нулю.

Формулы (3.21) можно теперь представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} Q=-X&=-\int_{(\Sigma)}[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p},\ x)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ x)]\,d\Sigma,\\ Y&=\int_{(\Sigma)}[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p},\ y)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ y)]\,d\Sigma,\\ Z&=\int_{(\Sigma)}[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p},\ z)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau},\ z)]\,d\Sigma. \end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

Приведем интегралы, входящие в эти формулы, к безразмерному виду. С этой целью выразим $p-p_\infty$ и τ через коэффициенты напряжения по известным формулам

$$p-p_\infty=\bar{p}\,\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2},\qquad \tau=\bar{\tau}\,\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}.$$

Кроме того, для приведения $d\Sigma$ к безразмерному виду выберем какую-нибудь площадь S, характерную для данного тела (например, площадь миделевого сечения, площадь поверхности и т. д.; в дальнейшем это будет более точно определено), и разделим $d\Sigma$ на S. Формула, например, для лобового сопротивления тогда примет вид

$$Q = -\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S \int_{(\Sigma)} [\bar{p}\cos(\boldsymbol{p}, x) + \bar{\tau}\cos(\boldsymbol{\tau}, x)] \frac{d\Sigma}{S}. \tag{3.23}$$

Интеграл в этой формуле представляет собой безразмерную величину, весьма удобную для характеристики лобового сопротивления тел данной формы. Если два тела геометрически подобны друг другу и одинаково ориентированы по отношению к вектору скорости центра тяжести, то значения $\cos(\boldsymbol{p}, x)$ и $\cos(\boldsymbol{\tau}, x)$ в сходственных точках одинаковы; точно так же одинаковы для сходственных площадок значения $d\Sigma/S$. Если, кроме того, в потоках, обтекающих эти тела, соблюдены условия динамического подобия, то в сходственных точках одинаковы значения $\bar{p}$ и $\bar{\tau}$. Тогда и значение интеграла в последней формуле будет одинаково для обоих тел, несмотря на то, что они могут быть разных размеров, двигаться с разными скоростями и в разных жидкостях.

Обозначим интеграл в последней формуле через $-c_x$; тогда эта формула и две другие, аналогичные ей, для Y и Z запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} Q &= c_x \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S, \\ Y &= c_y \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S, \\ Z &= c_z \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Безразмерные коэффициенты c_x, c_y, c_z в этих формулах называются соответственно коэффициентом лобового сопротивления, коэффициентом подъемной силы и коэффициентом боковой силы.

Результат, записанный в трех последних равенствах, можно сформулировать следующим образом: аэродинамическая сила $\boldsymbol{R}$ при движении тела в среде пропорциональна динамическому давлению $\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}$, квадрату линейных размеров тела S и, кроме того, зависит от некоторого безразмерного коэффициента c, соответствующего форме данного тела и условиям его обтекания:

$$\boldsymbol{R} = c\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S, \tag{3.25}$$

где

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

Пропорциональность силы сопротивления плотности среды была установлена Ньютоном (1687) на основании наблюдений над качаниями маятников в разных жидкостях и падением шаров, а пропорциональность силы сопротивления квадрату скорости движения была обоснована Ньютоном теоретически — с помощью открытого им же закона изменения количества движения [1]). Следует, однако, отметить, что исходное представление Ньютона о том, что среда состоит из большого количества материальных частиц, движущихся самостоятельно, не влияя друг на друга, было неправильным. Поэтому численные значения коэффициентов сопротивления, подсчитанные по теории Ньютона, оказались не соответствующими действительности.

По современным воззрениям, коэффициенты сопротивления зависят от обтекания тела на всем его протяжении, причем сопротивление вовсе не определяется одной какой-либо геометрической характеристикой тела, например площадью миделевого сечения, как предполагал Ньютон.

Определение коэффициентов сопротивления для данного тела — задача весьма сложная, полностью не решенная и до настоящего времени; в дальнейшем мы будем подробно заниматься этой задачей.

Подобно тому как мы вывели формулу для аэродинамической силы, можно вывести и формулу для аэродинамического момента $\boldsymbol{M}$. Выделим по-прежнему на поверхности тела Σ элементарную площадку $d\Sigma$ и обозначим ее координаты соответственно через x, y, z. Воспользовавшись найденными ранее выражениями для проекций на оси координат аэродинамических сил, приложенных к этой площадке, можем написать по известным формулам механики, что момент этих сил, например, относительно оси x равен

$$\{[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p}, z)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau}, z)]\,y-[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p}, y)+\\ +\tau\cos(\boldsymbol{\tau}, y)]\,z\}\,d\Sigma.$$

Интегрируя это выражение по всей поверхности тела Σ, получим:

$$M_x=\int\limits_{(\Sigma)}\{[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p}, z)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau}, z)]\,y-\\ -[(p-p_\infty)\cos(\boldsymbol{p}, y)+\tau\cos(\boldsymbol{\tau}, y)]\,z\}\,d\Sigma.$$

---

[1]) Кроме сопротивления, пропорционального плотности среды и квадрату скорости, т. е. происходящего, как считал Ньютон, от инерции среды, он различал еще две другие формы сопротивления, именно: сопротивление от сцепления между частицами жидкости и сопротивление от трения между телом и жидкостью. Сопротивление от сцепления частиц Ньютон считал постоянным для данной жидкости, не зависящим от скорости движения тела, а сопротивление трения — пропорциональным скорости движения тела. Таким образом, полное сопротивление среды может быть представлено по Ньютону, в виде суммы трех слагаемых: одного — пропорционального квадрату скорости, другого — пропорционального первой степени скорости и третьего — постоянного.

Приведем подынтегральное выражение к безразмерному виду, вынеся за знак интеграла $\rho_\infty V_\infty^2/2$, некоторую характерную для тела площадь S и характерную для тела длину L. Тогда формула для M_x примет вид

$$M_x = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} SL \int\limits_{(\Sigma)} \left\{ [\bar{p} \cos(\boldsymbol{p}, z) + \bar{\tau} \cos(\boldsymbol{\tau}, z)] \frac{y}{L} - \right.$$

$$\left. - [\bar{p} \cos(\boldsymbol{p}, y) + \bar{\tau} \cos(\boldsymbol{\tau}, y)] \frac{z}{L} \right\} \frac{d\Sigma}{S}.$$

По поводу этого интеграла можно повторить все то, что было сказано выше по поводу интеграла в формуле для Q. Этот интеграл представляет собою безразмерный коэффициент, который остается одним и тем же для всех геометрически подобных тел, если имеет место динамическое подобие потоков, обтекающих эти тела. Обозначим этот интеграл через m_x; тогда можно выразить момент M_x и аналогично M_y, M_z в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} SL, \\ M_y &= m_y \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} SL, \\ M_z &= m_z \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} SL. \end{aligned} \right\} \tag{3.26}$$

От проекций аэродинамического момента можно перейти теперь к нему самому:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} SL, \tag{3.27}$$

где

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$

Таким образом, аэродинамический момент оказывается пропорциональным динамическому давлению $\rho_\infty V_\infty^2/2$, кубу линейных размеров тела SL и, кроме того, зависит от некоторого безразмерного коэффициента момента $\boldsymbol{m}$, характерного для формы данного тела и условий его обтекания.

Задача об определении силового воздействия потока на тело сводится с помощью формул (3.24) и (3.26) к задаче об определении шести коэффициентов сопротивления: трех коэффициентов аэродинамической силы c_x, c_y, c_z и трех коэффициентов аэродинамического момента m_x, m_y, m_z.

До сих пор речь шла о проекциях $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ на оси скоростной системы координат. Проектируя $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ на оси связанной системы, получим формулы такого же вида, как и для скоростной системы, но с иным обозначением коэффициентов:

$$Q_1 = c_{x1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S, \qquad Y_1 = c_{y1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S,$$

$$Z_1 = c_{z1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S, \qquad M_{x1} = m_{x1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}SL,$$

$$M_{y1} = m_{y1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}SL, \qquad M_{z1} = m_{z1}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}SL.$$

Здесь имеют место следующие названия: c_{x1} — коэффициент продольной силы, c_{y1} — коэффициент нормальной силы, c_{z1} — коэффициент поперечной силы, m_{x1} — коэффициент момента крена, m_{y1} — коэффициент момента рыскания, m_{z1} — коэффициент момента тангажа.

Если известны коэффициенты сопротивления в одной из систем координат, то по формулам перехода могут быть найдены коэффициенты сопротивления в другой системе.

Оперируя с коэффициентами сопротивления, необходимо всегда иметь в виду, что их величина для одного и того же тела может быть различна в зависимости от того, какая площадь S и длина L введены в качестве характерной площади и характерной длины в формулы для аэродинамической силы и момента. Сравнивать между собою численные значения одноименных коэффициентов разных тел, что обычно приходится делать в процессе проектирования летательного аппарата, когда выбираются его формы, можно лишь в том случае, если эти коэффициенты относятся к одноименным для всех тел площадям и длинам (например, для всех рассматриваемых тел — к площади миделя). Если же имеются коэффициенты сопротивления, относящиеся к разным характерным площадям и длинам, то прежде, чем выбирать по значениям этих коэффициентов форму тела, необходимо предварительно пересчитать их на одну и ту же характерную площадь и длину. Эти характерные площадь и длина обычно выбираются по-разному в зависимости от назначения сравниваемых форм. Разъясним это более подробно.

Представим себе для конкретности, что нужно выбрать форму крыла, при которой скорость полета, необходимая для поддержания данного самолета в условиях горизонтального движения, будет наименьшей. Минимальная для данного самолета скорость, при которой он еще может двигаться горизонтально, не проваливаясь, обычно близка к скорости, которая используется при посадке (последняя называется поэтому посадочной скоростью данного самолета). Обычно стремятся к тому, чтобы она была возможно меньшей, так как при этом посадка будет наиболее безопасной; кроме того, будет минимальной длина пробега самолета при посадке и, что особенно важно в случае сильно нагруженного самолета, длина разбега при взлете. Вообще скорость, необходимая для поддержания самолета при горизонтальном установившемся полете (или, как говорят, потребная для горизонтального полета скорость), определяется из приближенного условия, что подъемная сила Y на этой скорости должна уравновешивать полетный вес самолета G:

$$Y = G.$$

С этой скоростью в аэродинамическом расчете сопоставляют так называемую располагаемую скорость, которая получается, например, из равенства между тягой двигателя и лобовым сопротивлением.

Подставляя в предыдущее равенство вместо Y его выражение по основной формуле через скорость полета, получим:

$$c_y \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S = G,$$

откуда находим величину потребной для горизонтального полета скорости:

$$V = \sqrt{\frac{2G}{\rho_\infty c_y S}}.$$

Как видим, в эту формулу входит отношение полетного веса G к характерной площади S. Отсюда можно судить о том, какую именно площадь удобно выбрать за характерную. Если за S принять площадь крыльев, точнее, площадь проекции крыльев на плоскость, проходящую через две параллельные хорды, то отношение G/S можно рассматривать как среднюю нагрузку, приходящуюся на один квадратный метр площади крыла; эта нагрузка обычно обозначается через p и является исходной величиной при проектировании самолета. Если она задана, то для достижения минимального значения потребной скорости следует, как видно из формулы, выбрать то крыло, у которого при прочих равных условиях коэффициент подъемной силы, отнесенный к площади крыльев, будет максимальным. Если, как это часто бывает, задается посадочная скорость самолета, а не нагрузка на 1 $м^2$ площади крыла, то, относя c_y к площади крыльев, мы получаем возможность определить по последней формуле эту площадь так, чтобы она была наименьшей из всех возможных (что весьма выгодно, ибо при этом будет минимальным сопротивление крыльев). С этой точки зрения также получается, что при сравнении разных форм крыльев надо выбрать такую, у которой будет максимальным коэффициент подъемной силы, отнесенный к площади проекции крыльев на плоскость хорды. Поэтому естественно принимать эту площадь за характерную во всех формулах для аэродинамической силы и момента, относящихся к крыльям или самолетам.

Иначе обстоит дело в том случае, если нужно выбрать форму для фюзеляжа скоростного самолета или моторной гондолы. Здесь заданными являются габариты двигателя, в частности площадь его миделевого сечения, и задача заключается в том, чтобы из всех форм с заданной площадью миделя (обеспечивающей размещение двигателя) выбрать такую, у которой лобовое сопротивление при прочих равных условиях будет наименьшим. Поэтому для фюзеляжей и моторных гондол естественно принимать в качестве характерной площади в формулах для аэродинамических сил и моментов площадь миделевого сечения. Тогда наивыгоднейшей будет та форма, для которой соответствующий коэффициент лобового сопротивления минимальный.

Однако для тел иного назначения, например для аэростатов, площадь миделевого сечения совершенно не является характерной. При выборе формы аэростата критерием (по крайней мере, с аэродинамической точки зрения) также является минимальное лобовое сопротивление, однако при условии, что все рассматриваемые формы вмещают один и тот же объем подъемного газа. Подъемная сила аэростата при прочих равных условиях пропорциональна объему газа, находящегося в оболочке или в специальных газовых баллонах. Величина газового объема является исходной величиной при проектировании аэростата. С этим объемом непосредственно связан наружный объем аэростата, который можно назвать объемом вытесненного воздуха или, иначе, воздухоизмещением. Задача, которая возникает при выборе формы для аэростата, заключается в том, чтобы из всех форм, обеспечивающих одну и ту же статическую подъемную силу, выбрать такую, при которой лобовое сопротивление будет наименьшим. Поэтому здесь естественно ввести в формулы для аэродинамических сил и моментов такую площадь, которая непосредственно связана с объемом корпуса. Обычно берут воздухоизмещение аэростата W (с этой величиной в аэродинамике удобнее оперировать, нежели с газовым объемом) и принимают условную площадь, равную $W^{2/3}$, за характерную во всех вопросах аэродинамики аэростата. Наивыгоднейшей будет форма, которая будет иметь минимальный коэффициент лобового сопротивления, отнесенный к $W^{2/3}$. Кстати сказать, наивыгоднейшие формы в смысле минимума c_x будут разными в зависимости от того, к какой характерной площади отнесены коэффициенты лобового сопротивления. Не следует поэтому думать, что существует, так сказать, универсальная удобообтекаемая форма, т. е. такая, которая является в равной мере наивыгоднейшей как для фюзеляжа, так и для аэростата.

В вопросах аэродинамики, относящихся к удобообтекаемым телам, у которых почти все сопротивление есть сопротивление поверхности трения, в качестве характерной площади часто берут также площадь поверхности тела.

Из всех этих примеров читатель мог убедиться в том, что площадь, которая входит в формулы для аэродинамической силы и момента, выбирается всякий раз в соответствии с рассматриваемой частной задачей. Важно лишь, чтобы для всех сравниваемых форм коэффициенты сопротивления были отнесены к одноименной площади. Если же они отнесены к разноименным площадям, то нетрудно пересчитать их на одну и ту же площадь. Пусть, например, коэффициент сопротивления c_1 отнесен к площади S_1, а нам необходимо при решении того или иного вопроса иметь коэффициент сопротивления для того же тела c_2, отнесенный к площади S_2. Тогда, выразив силу сопротивления как через первый коэффициент, так и через второй:

$$R = c_1 \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_1 \quad \text{и} \quad R = c_2 \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_2$$

и приравнивая друг другу оба выражения, находим:

$$c_2 = c_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

Отсюда проектированием на оси координат скоростной или связанной систем получаются аналогичного вида формулы для составляющих коэффициента сопротивления.

Все, что изложено выше по поводу характерной площади S, относится с соответствующими изменениями и к характерной длине L, которая входит в формулу для аэродинамического момента. Характерная длина L определяется условно, в разных вопросах по-разному. Чаще всего ее определяют как расстояние между центром тяжести летательного аппарата и осью вращения рулей высоты. В вопросах, относящихся к изолированным крыльям, длину L определяют как хорду профиля, который получается в сечении крыла плоскостью симметрии.

Основные формулы для аэродинамических сил и моментов позволяют также установить параметры, от которых зависят коэффициенты сопротивления. Возьмем, например, формулу для коэффициента силы лобового сопротивления:

$$c_x = -\int_{(\Sigma)} \left[\bar{p} \cos(\boldsymbol{p}, x) + \bar{\tau} \cos(\boldsymbol{\tau}, x)\right] \frac{d\Sigma}{S}.$$

Для тела заданной формы $\cos(\boldsymbol{p}, x)$ и $\cos(\boldsymbol{\tau}, x)$ зависят от направления осей координат скоростной системы, т. е. от ориентировки тела по отношению к этой системе, определяемой углом атаки α и углом скольжения β; $\bar{p}$ и $\bar{\tau}$, как известно из предыдущего, зависят от числа Рейнольдса R, числа M, числа Фруда F, числа Струхала S и других критериев динамического подобия. Таким образом, для тела заданной формы

$$c_x = F(\alpha, \beta, \mathsf{R}, \mathsf{M}, \ldots).$$

Аналогичные заключения можно сделать по поводу всех остальных коэффициентов сопротивления, так что вообще

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}(\alpha, \beta, \mathsf{R}, \mathsf{M}, \ldots), \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{f}(\alpha, \beta, \mathsf{R}, \mathsf{M}, \ldots).$$

Некоторые из этих зависимостей мы рассмотрим в следующих параграфах.