

служит для измерения продольного момента. На поверхность этого элемента наклеены тензодатчики D_1 и D_2 , которые включены в цепь моста Уитстона A , так, как показано на рисунке снизу. R_1 и R_2 — одинаковые постоянные сопротивления. Электрическое напряжение ΔU_1 на измерительной диагонали AB пропорционально изгибающему моменту в балочке $3a$, который равен M_{z1} в случае, если начало координат весов поместить в точку O , находящуюся в середине балочки. Передний упругий параллелограмм служит для измерения нормальной силы Y_1 , приложенной в точке O . На тонкие горизонтальные балочки $3б$ этого параллелограмма наклеены тензодатчики D_3, \dots, D_6 , включенные в цепь моста B . Напряжение ΔU_2 на измерительной диагонали этого моста пропорционально Y_1 . Для измерения тангенциальной силы сопротивления Q_1 служат вертикальные балочки $3в$ заднего упругого параллелограмма, на которые наклеены тензодатчики D_7, \dots, D_{10} , включенные в мост C .

В современных аэродинамических трубах напряжения $\Delta U_1, \Delta U_2$ и ΔU_3 , пропорциональные измеряемым компонентам, определяются с помощью автоматических устройств, позволяющих получать результаты измерений в цифровой форме.

§ 21. Определение аэродинамической силы методом импульсов. Спутная струя за телом

До сих пор мы рассматривали аэродинамические силы и моменты как результирующие элементарных сил и моментов, распределенных по поверхности обтекаемого тела. Однако можно определить аэродинамические силы и моменты другим способом, не зная распределения напряжений по поверхности тела. Для этой цели ограничим некоторой замкнутой поверхностью Σ конечный объем среды, включающий и данное тело. Рассмотрим объем среды, ограниченный поверхностями Σ и поверхностью S данного тела. Применим к этому объему теорему об изменении количества движения, которая, как известно, гласит: изменение количества движения материальной системы за некоторый промежуток времени равно импульсу внешних сил, действующих на материальную систему. Внешними силами, действующими на выделенный объем, если пренебречь объемными силами, будут поверхностные силы, распределенные по поверхностям Σ и S . Последние, т. е. силы, распределенные по поверхности S , являются реакциями обтекаемого тела. Следовательно,

$$\Delta I = F \Delta t,$$

где ΔI есть изменение количества движения среды в выделенном объеме за время Δt .

В дальнейшем (гл. V) будет доказано, что при установившемся течении изменение количества движения жидкого объема за какой-либо промежуток времени равно количеству движения, протекающему

за то же время сквозь ограничивающую объем поверхность (она называется контрольной поверхностью). Итак, необходимо провести в жидкости замкнутую контрольную поверхность, внутри которой находится обтекаемое тело, и, предполагая ее неподвижной, подсчитать количество движения, протекающее сквозь эту поверхность в единицу времени.

Форма контрольной поверхности (Σ), принципиально говоря, безразлична, но для упрощения вычислений удобно составить ее из плоскостей, перпендикулярных к направлению набегающего потока: одной — проведенной перед телом, другой — за телом, и плоскостей, параллельных потоку (рис. 3.83).

Если передняя плоскость 11 проведена на большом расстоянии перед телом, то можно считать, что во всех ее точках скорость равна

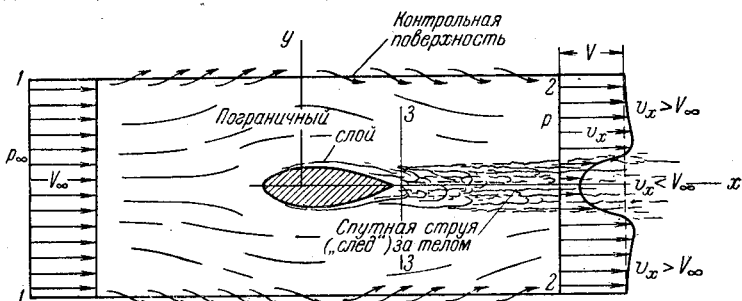


Рис. 3.83. К определению силы сопротивления среды методом импульсов.

скорости невозмущенного телом потока V_∞ , а давление равно давлению в невозмущенной среде p_∞ . Так как частицы жидкости, проходящие возле неподвижной поверхности тела, затормаживаются, то за телом образуется область, состоящая из этих заторможенных частиц, которая называется *спутной струей* или «следом» тела. Вследствие того, что вблизи поверхности тела действуют значительные силы трения, в спутной струе имеет место вращение частиц. Здесь могут быть, как увидим в дальнейшем, и отдельные вихри, возникающие при обтекании тела. Примерное распределение продольных скоростей в плоскости 22, проведенной далеко за телом, показано на рис. 3.83. Спутная струя проявляется в виде характерной впадины ($u_x < V_\infty$) в профиле продольной скорости. Вне этой впадины скорость несколько больше V_∞ , как это и должно быть по уравнению расхода. При удалении от оси x скорость асимптотически приближается к V_∞ .

На плоскостях, параллельных направлению набегающего потока, при скорости, меньшей скорости распространения звука, имеет место следующая картина распределения скоростей: в передней части, где струйки раздвигаются перед телом, скорости направлены наружу выделенного объема, а в задней части, где струйки смыкаются за телом, они направлены внутрь выделенного объема. Чем дальше от

тела проведены эти плоскости, тем меньше протекающее сквозь них количество движения.

В пределе, при бесконечном удалении этих плоскостей от тела, протекающее сквозь них количество движения становится равным нулю. Для упрощения вычислений удобно взять именно такое положение этих плоскостей, т. е. от контрольной поверхности, изображенной на рис. 3.83, перейти к контрольной поверхности, состоящей из двух бесконечных плоскостей 11 и 22, перпендикулярных скорости набегающего потока.

Вычислим количество движения, протекающее в единицу времени сквозь эти две плоскости. Выделим в потоке элементарную струйку и обозначим через $d\Sigma_1$ площадь ее сечения плоскостью 11 и через $d\Sigma_2$ — площадь ее сечения плоскостью 22. Количество движения, втекающее в единицу времени сквозь $d\Sigma_1$, равно — $\rho_1 V_\infty V_\infty d\Sigma_1$ (знак — здесь потому, что положительным мы считаем расход в направлении внешней нормали к контрольной поверхности, а сквозь $d\Sigma_1$ поток течет в направлении внутренней нормали); количество движения, вытекающее в единицу времени через $d\Sigma_2$, равно $\rho_2 v_x v d\Sigma_2$. Изменение количества движения в единицу времени в объеме, ограниченном плоскостями 11 и 22, запишется теперь в виде

$$\frac{dI}{dt} = \int_{(1,2)} (\rho_2 v_x v d\Sigma_2 - \rho_1 V_\infty V_\infty d\Sigma_1);$$

здесь интегрирование распространяется на все площадки $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$, т. е. на плоскости 11 и 22. Можно, однако, упростить последнее выражение и перейти в нем к интегрированию лишь по плоскости 22. Заметим с этой целью, что при установившемся течении по уравнению расхода для элементарной струйки можно написать:

$$\rho_2 v_x d\Sigma_2 = \rho_1 V_\infty d\Sigma_1.$$

Исключая с помощью последнего равенства $d\Sigma_1$ из выражения, находящегося под знаком интеграла, получим:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{(2)} (v - V_\infty) \rho_2 v_x d\Sigma_2;$$

здесь интегрирование распространяется только на плоскость 22.

Силы, действующие на выделенный объем жидкости, сводятся к реакции тела, равной — R (где R есть аэродинамическая сила), к результирующей нормальных напряжений, распределенных по плоскостям 11 и 22, и касательных напряжений, распределенных по плоскости 22:

$$F = -R + \int_{(2)} (p_\infty - p) d\Sigma_2 + \int_{(2)} \tau d\Sigma_2.$$

Приравнивая изменение количества движения за единицу времени результирующей приложенных к объему сил, получим формулу для определения аэродинамической силы

$$R = \int_{(2)} (V_{\infty} - v) \rho_2 v_x d\Sigma_2 + \int_{(2)} (p_{\infty} - p) d\Sigma_2 + \int_{(2)} \tau d\Sigma_2.$$

Отсюда, проектируя обе части равенства на оси координат, можно получить выражения для лобового сопротивления, подъемной силы и боковой силы. Остановимся подробнее на формуле для лобового сопротивления. Проектируя это равенство на направление скорости набегающего потока, будем иметь:

$$Q = \int_{(2)} (V_{\infty} - v_x) \rho_2 v_x d\Sigma_2 + \int_{(2)} (p_{\infty} - p) d\Sigma_2.$$

По этой формуле можно определить лобовое сопротивление как теоретически, если известно движение жидкости за телом, так и экспериментально, измеряя скорости и давления в плоскости 22, проведенной за телом.

Интегрирование в последней формуле распространяется, как уже указывалось, на бесконечную плоскость, перпендикулярную направлению набегающего потока. Бесконечная область интегрирования представляет большое неудобство, в особенности при экспериментальном определении Q . Однако если обтекаемое тело таково, что в плоскости 22 v_y и v_z малы по величине, то при практическом проведении вычислений можно значительно упростить последнюю формулу и, в частности, распространять интегрирование не на бесконечную плоскость, а лишь на область, которая получается в пересечении плоскости 22 со спутной струей. Условие, что v_y и v_z малы в плоскости 22, означает, в частности, что за телом не должно быть вихрей с осями, параллельными потоку; такие вихри образуются, например, за крыльями вследствие обтекания их торцов.

Наличие таких вихрей и вообще наличие в плоскости 22 значительных по величине составляющих v_y и v_z может привести к тому, что p будет значительно отличаться от p_{∞} ¹⁾. Но если условие малости v_y и v_z выполнено, то, как показывают опыты и теория пограничного слоя, давление в спутной струе, имея максимум в кормовой точке тела, при удалении от тела быстро убывает и уже на небольшом расстоянии за телом становится практически равным p_{∞} . Поэтому при надлежащем выборе плоскости 22 можно считать, что во всех ее точках $p = p_{\infty}$, и, следовательно, можно пренебречь вторым слагаемым в последней формуле.

Опыты показывают далее, что если указанное выше условие о v_y и v_z выполнено, то на плоскости 22, вне сечения спутной струи,

¹⁾ Лобовое сопротивление, которое происходит в этом случае оттого, что $p < p_{\infty}$, называется индуктивным лобовым сопротивлением.

скорость v_x практически не отличается от V_∞ , и следовательно, в первом слагаемом последней формулы можно ограничиться при интегрировании лишь областью Σ сечения спутной струи. Формула для лобового сопротивления приобретает тогда следующий, упрощенный вид:

$$Q = \int_{(\Sigma)} \rho (V_\infty - v_x) v_x d\Sigma.$$

Отсюда коэффициент лобового сопротивления получается равным

$$c_x = 2 \int_{(\Sigma)} \frac{\rho}{\rho_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{V_\infty}\right) \frac{v_x}{V_\infty} \frac{d\Sigma}{S}, \quad (3.40)$$

где S есть характерная площадь тела.

По этой формуле можно вычислить c_x , если известно распределение скорости и плотности по сечению спутной струи. Таким образом, движение жидкости в спутной струе полностью определяет сопротивление данного тела.

Последняя формула, однако, неудобна для практического применения. Дело в том, что плоскость 22 (в которой давление должно быть с достаточной степенью точности равно p_∞) расположена за телом на значительном по сравнению с размерами тела расстоянии. Измерение скорости v_x в этой плоскости, особенно в условиях полета, весьма затруднительно. Поэтому для применения формулы (3.40) при экспериментальном определении c_x методом импульсов ее следует преобразовать к такому виду, чтобы в нее входили лишь величины, легко доступные измерению. Проведем с этой целью плоскость 33, параллельную плоскости 22, но расположенную за телом, в непосредственной близости к нему. Обозначим давление и скорость в произвольной точке этой плоскости соответственно через p_1 и v_1 . Ограничиваясь случаем, когда среда является несжимаемой, и применяя уравнение Бернулли к двум сечениям какой-либо струйки плоскостями 22 и 33, будем иметь:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho v_x^2}{2}.$$

Обозначив полное давление в плоскости 33 (т. е. сумму $p_1 + \rho v_1^2/2$) через p_{n1} , получим из последнего равенства:

$$v_x = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{n1} - p_\infty)}.$$

Аналогично находим:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{n\infty} - p_\infty)},$$

где $p_{n\infty}$ есть полное давление в плоскости 11.

Из последних двух равенств следует:

$$\frac{v_x}{V_\infty} = \sqrt{\frac{P_{\text{пн}} - P_\infty}{P_{\text{п00}} - P_\infty}}$$

Формула (3.40) теперь примет вид

$$c_x = 2 \int_{(\Sigma)} \left(1 - \sqrt{\frac{P_{\text{пн}} - P_\infty}{P_{\text{п00}} - P_\infty}} \right) \sqrt{\frac{P_{\text{пн}} - P_\infty}{P_{\text{п00}} - P_\infty}} \frac{d\Sigma}{S}$$

Все величины здесь могут быть непосредственно измерены (разность полного давления в какой-либо точке и статического определяется, как известно, с помощью скоростной трубки) и относятся

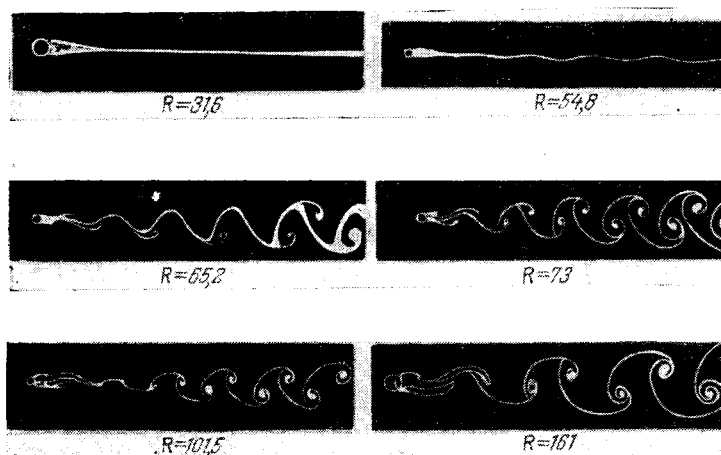


Рис. 3.84. Движение жидкости в спутной струе кругового цилиндра, обтекаемого перпендикулярно образующей, при малых значениях числа Рейнольдса.

к плоскостям, доступным для измерения. Аналогично может быть преобразована формула (3.40) и в случае сжимаемой среды.

Рассмотрим теперь подробнее движение жидкости в спутной струе. Наблюдения показывают, что при весьма малых значениях числа Рейнольдса за телом образуется область заторможенной жидкости, которая сужается при удалении от тела и затем в виде тонкого, слегка колеблющегося в поперечном направлении хвоста тянется на большом расстоянии за телом. По мере роста числа Рейнольдса поперечное колебательное движение в хвосте усиливается, и он распадается на два ряда противоположно вращающихся вихрей. Картина последовательного развития движения в спутной струе кругового цилиндра при возрастании чисел Рейнольдса показана здесь на photographиях (рис. 3.84). Она будет качественно такой же и для всякого другого неудобообтекаемого цилиндрического тела.

В области непосредственно за телом, если его кормовая часть имеет круто закругленную форму или срезана, возникает пара противоположно вращающихся вихрей. Эта область при возрастании чисел Рейнольдса вытягивается вдоль потока, вихри становятся несимметричными, поочередно с одной и другой стороны отрываются от тела и движутся вдоль потока. Если поперечное сечение цилиндра имеет ось симметрии и поток направлен вдоль нее, то с боков цилиндра будут отрываться вихри равной интенсивности. Наблюдения

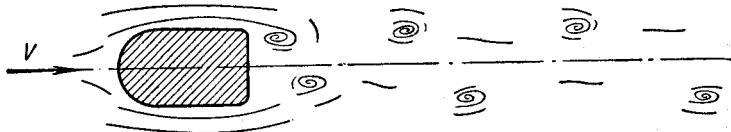


Рис. 3.85. Два ряда вихрей, образующихся за неудобнообтекаемым цилиндрическим телом.

показывают, что при числах Рейнольдса приблизительно от $R=100$ до $R=2500$ эти вихри, двигаясь вместе с потоком, располагаются за телом примерно на равном расстоянии друг за другом в виде двух слегка расходящихся в стороны рядов, которые тянутся далеко за телом (рис. 3.85). Эти вихревые ряды неоднократно изучались как экспериментально, так и теоретически.

Исследуя теоретически движение жидкости в спутной струе за неудобнообтекаемым телом, Карман предположил, что центры вихрей располагаются на равных расстояниях друг от друга на двух парал-

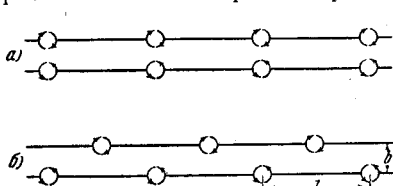


Рис. 3.86. Неустойчивое (а) и устойчивое (б) расположения вихрей на двух параллельных прямых.

лельных прямых, простирающихся до бесконечности — в обе стороны. Для того чтобы решить вопрос о расположении вихрей одного ряда по отношению к вихрям другого ряда, Карман, а впоследствии при более общих предположениях Н. Е. Кочин, исследовали устойчивость таких вихревых систем. Оказалось, что расположение вихрей друг против друга является неустойчивым (рис. 3.86, а) и при всяком случайном отклонении от этого расположения вихри размещаются так (рис. 3.86, б), что центры вихрей одного ряда приходятся против середин расстояний между вихрями другого ряда (так называемое «шахматное» расположение вихрей). Вихревая система с «шахматным» расположением центров вихрей получила в дальнейшем название «вихревой дорожки» Кармана.

Из условия устойчивости вихревой системы получается, кроме того, вполне определенная зависимость между шириной вихревой дорожки b и расстоянием l между соседними вихрями каждого ряда; оказывается, что в случае устойчивого расположения вихрей

$$\frac{b}{l} = 0,281.$$

Вихревая дорожка за неудобообтекаемым телом является причиной дополнительного (по сравнению с удобообтекаемым телом) изменения скоростей в спутной струе. Нетрудно видеть, что скорости, возникающие от обоих рядов вихрей, имеют внутри вихревой дорожки составляющую, направленную против набегающего потока, а вне вихревой дорожки — составляющую, направленную вдоль скорости набегающего потока. Можно подсчитать, что вследствие этого количество движения, протекающее в единицу времени через сечение за телом, меньше количества движения, протекающего за то же время через сечение перед телом.

Применяя теорему импульсов, Карман вывел формулу для лобового сопротивления тела, происходящего от вихревой «дорожки». Эта формула имеет такую же структуру, как и общая формула (3.40), выведенная методом импульсов, с той лишь разницей, что вместо $d\Sigma/S$ введена пропорциональная этому отношению величина l/d , где d есть характерный размер поперечного сечения цилиндра, а вместо v_x/V — пропорциональная этому отношению величина v/V , где v есть собственная скорость движения вихрей вдоль дорожки. Формула Кармана, которую мы приводим без вывода¹⁾, имеет окончательно следующий вид:

$$c_x = \frac{l}{d} \left[1,59 \frac{v}{V_\infty} - 0,63 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \right].$$

Однако определить теоретически все величины, входящие в эту формулу, до сих пор не удалось. Расстояние между вихрями l и собственная скорость их движения вдоль дорожки v (или другие величины, с помощью которых могут быть определены l и v) должны быть найдены для каждого тела экспериментально. Например, для кругового цилиндра Карман и Рубах в результате наблюдений получили следующие значения входящих в формулу для c_x величин: $l/d = 4,3$, где d есть диаметр цилиндра, $v/V_\infty = 0,14$; коэффициент сопротивления получается при этом по формуле Кармана равным 0,91, что весьма близко к значению c_x , экспериментально найденному для тех же чисел Рейнольдса.

Следует отметить, что кроме необходимости в экспериментальном определении величин, входящих в теоретическую формулу, теория лобового сопротивления, данная Карманом, имеет и другие недостатки. Она относится только к неудобообтекаемым телам, определяет не полное лобовое сопротивление, а только часть его, происходящую от вихревой дорожки и, кроме того, относится к весьма ограниченному диапазону чисел Рейнольдса. Как уже указывалось ранее, устойчивые вихревые дорожки за неудобообтекаемыми телами наблюдаются только при числах Рейнольдса, не превосходящих приблизительно 2500.

¹⁾ Этот вывод читатель может найти, например, в книге: Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Физматгиз, 1963.

При больших значениях числа Рейнольдса движение жидкости в спутной струе становится турбулентным непосредственно за телом, вихри вследствие турбулентного перемешивания очень быстро диффундируют в окружающую жидкость, так, что, едва возникнув, они тотчас же затухают.

Распределение скоростей в турбулентной спутной струе за удобообтекаемым телом может быть вычислено по теории турбулентного движения (гл. VI).

Типичное распределение скоростей по сечению спутной струи для случая цилиндрического тела, симметричного относительно плоскости xz , показано на рис. 3.87. По оси абсцисс здесь отложено

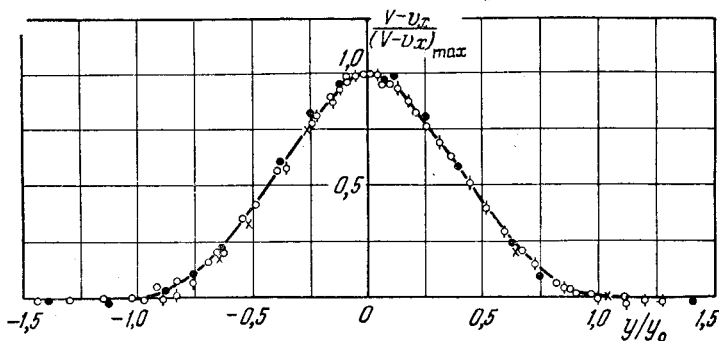


Рис. 3.87. Распределение «недостатка» скорости $V_{\infty} - v_x$ по сечению спутной струи при турбулентном движении; y_0 — ширина спутной струи.

расстояние от плоскости симметрии тела, приведенное к безразмерному виду, а по оси ординат — «недостаток» скорости $V_{\infty} - v_x$, также приведенный к безразмерному виду.

Различные кружки и крестики изображают экспериментальные точки, соответствующие сечениям спутной струи, взятым на разном расстоянии от тела (от 100 до 200 его характерных размеров); сплошная кривая изображает результаты вычисления, проведенного по теории турбулентного движения. Совпадение, как видно из графика, получается хорошее на всем протяжении спутной струи. Так как экспериментальные точки, соответствующие разным сечениям спутной струи, располагаются при безразмерных координатах на одной универсальной кривой, то отсюда можно заключить, что профили скоростей в разных сечениях подобны друг другу, т. е. что на всем протяжении спутной струи имеет место кинематическое подобие.

Заметим, что аналогичный характер имеет распределение скоростей в турбулентной струе, вытекающей из отверстия (начиная с расстояния в несколько диаметров от отверстия).