ГЛАВА IV
КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 1. Особенности кинематики жидкостей и газов. Метод Лагранжа и метод Эйлера

Основной задачей кинематики жидкости является определение скоростей частиц. Совокупность скоростей частиц жидкой среды образует *поле скоростей*. Таким образом, в кинематике жидкой среды занимаются исследованием поля скоростей. В кинематике твердого тела также исследуется поле скоростей. Однако поле скоростей твердого тела подчинено основному условию: проекции скоростей двух точек тела на прямую, их соединяющую, равны между собой. На основании этого условия поле скоростей твердого тела будет вполне определено, если будут известны скорости трех точек тела, не лежащих на одной прямой.

В жидкой среде подобные связи между частицами отсутствуют, и движение трех частиц никак не определяет движения остальных. Движение жидкости лишь тогда можно считать определенным, если известна скорость $\boldsymbol{v}$ в любой точке жидкой среды, т. е. если известно *поле скоростей*.

Ввиду трудностей, которые возникают в кинематике жидкости вследствие большой численности и легкой подвижности частиц, оказывается удобным несколько видоизменить применительно к особенностям жидкого потока обычные методы кинематики. Существуют два метода кинематического описания жидкого потока. Один из них обычно называют методом Лагранжа, другой — методом Эйлера. Метод Лагранжа ничем, собственно, не отличается от общих методов кинематики, рассматриваемых в курсах механики. Конечной задачей кинематики, как известно из общего курса механики, является определение траекторий движения. Так же исследуется и движение жидкости по методу Лагранжа. Для каждой частицы жидкости должна быть определена ее траектория, т. е. координаты этой частицы должны быть определены как функции времени. Но так как частиц бесчисленное множество, то в самом способе задания траектории должно быть указано, к какой именно частице относится данная траектория. Для этого достаточно фиксировать положение всех частиц в какой-нибудь определенный, начальный момент времени t_0. Пусть при $t=t_0$ координаты какой-либо частицы будут соответственно a, b, c; эти параметры отличают рассматриваемую частицу от других частиц.

Таким образом, координаты частицы x, y, z зависят от времени t и от начального положения частицы, определяемого точкой (a, b, c):

$$x=f_1(t, a, b, c), \quad y=f_2(t, a, b, c), \quad z=f_3(t, a, b, c). \tag{4.1}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения семейства траекторий в параметрическом виде, заполняющих все пространство, занятое жидкой средой; a, b и c являются параметрами, определяющими траекторию. Уравнения (4.1) полностью определяют кинематику потока. В самом деле, зная эти уравнения, нетрудно определить скорость частицы в любой момент времени; компоненты скорости v_x, v_y, v_z определяются по известным формулам:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f_1(t, a, b, c), \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f_2(t, a, b, c), \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f_3(t, a, b, c). \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Аналогично определяются и ускорения.

Однако для решения практических задач аэродинамики вовсе нет надобности знать траектории частиц. Пусть, например, нужно определить давления на поверхности крыла во время горизонтального полета с постоянной скоростью. Для этого, как разъяснялось в гл. II, нужно прежде всего представить себе обращенное движение, т. е. вообразить, что крыло находится в покое, а поток на него набегает. Давление в каждой точке поверхности крыла тогда может быть определено по уравнению энергии, если предварительно определена скорость потока *в каждой точке*. Как видим, эта практическая задача ставит перед кинематикой жидкости вопрос об определении скорости в той или иной *точке пространства* вне зависимости от индивидуальности частиц, которые через эту точку проходят. Траектории же частиц здесь вообще не нужны. Этим практическим запросам отвечает метод Эйлера, который в том как раз и заключается, что фиксируется не частица (как в методе Лагранжа), а точка в пространстве с координатами x, y, z и исследуется изменение скорости в этой точке с течением времени. Конечно, при этом через рассматриваемую точку проходят разные частицы.

Кинематика потока с точки зрения этого метода описывается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F_1(x, y, z, t), \\ v_y &= F_2(x, y, z, t), \\ v_z &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Как видим, этот метод отвечает специфическим требованиям, предъявляемым к кинематике жидкого потока, и, кроме того, он гораздо проще метода Лагранжа, что в свою очередь очень важно ввиду трудностей, которые сопряжены с одновременным исследованием движения бесчисленного множества почти не связанных между собой частиц.

От описания кинематики потока по методу Лагранжа, т. е. от уравнений (4. 1), всегда можно перейти к описанию по методу Эйлера, т. е. к уравнениям (4. 3). Эта задача решается дифференцированием уравнений (4. 1) по времени с последующим исключением параметров a, b, c из уравнений (4. 1) и (4. 2). Обратная задача — по заданному полю скоростей (4. 3) определить траектории частиц — гораздо сложнее. Математически она приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Общим интегралом этих уравнений как раз и являются уравнения (4. 1), где a, b, c суть произвольные постоянные. Таким образом, метод Лагранжа дает больше сведений о кинематике потока, нежели метод Эйлера: если исходить из метода Эйлера, то траектории частиц можно получить лишь после интегрирования системы дифференциальных уравнений, тогда как в методе Лагранжа траектории непосредственно даны. Но метод Лагранжа зато гораздо сложнее. В дальнейшем мы будем встречаться чаще с кинематическим описанием потока по методу Эйлера; однако в некоторых вопросах, именно при изучении деформаций жидкой частицы, отдельных видов ее движения, мы, по сути дела, будем применять метод Лагранжа.

В предыдущем, при выводе уравнения неразрывности движения (гл. II, § 1), мы имели примеры применения как одного метода, так и другого. Первоначально мы выделили некоторый жидкий объем V, т. е. объем, состоящий во все время движения из *одних и тех же частиц* жидкости, и исследовали его деформацию с течением времени. Это был ход идей, соответствующий методу Лагранжа. Затем тот же вопрос был рассмотрен с иной точки зрения. Мы представили себе, что замкнутая поверхность S, ограничивающая объем V, остается неподвижной, а жидкость течет через нее. При этом *разные частицы* проходили через *одно и то же место* в пространстве, ограниченное поверхностью S. Это был ход идей, соответствующий методу Эйлера. Физическое истолкование результата получилось, как мы знаем, разное (скорость удельной объемной деформации с одной точки зрения и удельный расход жидкости — с другой). Таким образом, оба метода не исключают, а дополняют друг друга.