§ 2. Линии тока и траектории частиц

Каждому из описанных методов соответствует свой способ геометрического изображения потока. Методу Лагранжа, как мы видели в предыдущем параграфе, соответствует понятие о траекториях частиц. Для метода Эйлера характерным является понятие о так называемых линиях тока жидкости. Для выяснения этого понятия представим себе поле скоростей потока жидкости, соответствующее какому-нибудь определенному моменту времени $t=t_0$ (рис. 4. 1). Общая картина течения в данный момент получится, если провести линии в потоке, совпадающие с направлением вектора скорости. Точнее говоря, надо поступить следующим образом. Пусть при $t=t_0$ в точке A_1 вектор скорости равен $\boldsymbol{v}_1$. Возьмем точку A_2, соседнюю с A_1 и находящуюся на векторе $\boldsymbol{v}_1$; пусть при $t=t_0$ вектор скорости в точке A_2 равен $\boldsymbol{v}_2$. Пусть, далее, в точке A_3, соседней с A_1 и находящейся на $\boldsymbol{v}_2$, вектор скорости в тот же момент времени равен $\boldsymbol{v}_3$ и т. д. Переходя, таким образом, от одной точки в потоке к другой, соседней с первой и находящейся на ее векторе скорости, мы получим ломаную линию, состоящую из отрезков векторов скорости. Если теперь все стороны этой ломаной линии одновременно уменьшать до нуля и количество их увеличивать до бесконечности, то в пределе получится линия, которая в каждой точке является касательной к вектору скорости; по отношению ко всему семейству векторов она является огибающей. Это и будет линия тока.

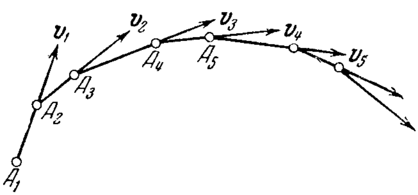

Рис. 4.1. Построение линии тока жидкости.

Таким образом, *линия тока представляет собой огибающую векторов скорости в разных точках потока, взятых в один и тот же для всех точек момент времени $t=t_0$. Через каждую точку в потоке можно провести мысленно только одну линию тока.*

В этом состоит большое преимущество линий тока перед траекториями частиц. Через каждую точку может проходить множество траекторий частиц. Траектории могут пересекать сами себя, могут быть очень сложны и запутаны. Линии тока не пересекаются ни сами с собою, ни друг с другом, ибо в точке пересечения вектор скорости в данный момент имел бы два разных направления, что физически невозможно. Исключение составляют лишь так называемые особые точки потока, в которых величина скорости равна нулю (точка торможения) или бесконечности.

Семейство линий тока дает картину течения в данный момент времени, так сказать, моментальный фотографический снимок направлений скоростей потока. Ряд таких снимков для разных моментов времени представляет собой геометрическое изображение потока, соответствующее методу Эйлера.

Необходимо отчетливо усвоить различие между линиями тока и траекториями частиц. Траектория частицы фиксирует изменение положения *одной и той же частицы с течением времени*; линия тока указывает направление скоростей *разных частиц в один и тот же момент времени*. Вообще говоря, эти линии и не совпадают. В качестве примера на рис. 4.2, *а* приведены линии тока при движении шара с постоянной скоростью в идеальной, т. е. лишенной сил трения, жидкости, а на рис. 4.2, *б* — траектории частиц для того же случая. Как видно из формы траектории, шар при своем движении

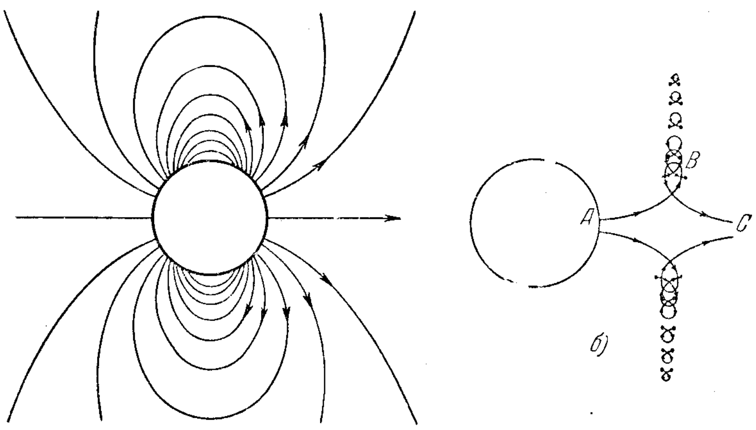

Рис. 4.2. Линии тока (*а*) и траектории частиц (*б*) при движении шара в идеальной несжимаемой жидкости.

расталкивает частицы вперед по направлению движения и в стороны (линии *AB*). Частица достигает вершины петлеобразной кривой (точка *B*) в то время, когда на одной вертикали с ней находится центр шара, и затем по линии *BC* устремляется за шаром.

Имеется лишь один частный, но весьма важный случай, когда линии тока совпадают с траекториями частиц. Это — случай, когда движение является установившимся, т. е. таким, что вектор скорости в каждой точке не зависит от времени. Каждая частица в этом случае движется по линии тока, ибо в любой точке на своем пути она имеет ту же скорость, которую имели все остальные частицы, проходившие через эту точку в другие моменты времени. В качестве примера на рис. 4.3 изображено обтекание шара, т. е. движение, обращенное по отношению к предыдущему и, следовательно, установившееся. Здесь линии тока и траектории частиц совпадают.

Иногда, в частности при экспериментальных исследованиях, вводят понятие о линиях отмеченных частиц. Линией отмеченных частиц называют линию, на которой находятся все частицы, прошедшие (в разные моменты времени) через фиксированную точку в пространстве. При экспериментальном исследовании потока такую линию легко получить, вводя в поток трубку, через которую подается краска, в случае, когда движется капельная жидкость, или например, дым в случае, когда движется воздух. Каждая частица, которая проходит у отверстия трубки, окрашивается и тем самым как бы отмечается. Окрашенная струйка, которая при этом получается, состоит из частиц, прошедших возле отверстия трубки; такая струйка представляет линию отмеченных частиц.

В случае, когда движение установившееся, все частицы, прошедшие через одну и ту же точку, движутся по одной общей траектории, и следовательно, в этом случае линия отмеченных частиц совпадает с траекторией. Но так как траектории в этом случае являются одновременно и линиями тока, то можем, таким образом, сказать, что кинематика установившегося потока полностью характеризуется одним семейством линий, которое представляет собой в одно и то же время семейство траекторий, линий тока и линий отмеченных частиц.

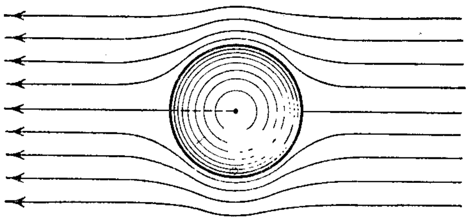

Рис. 4.3. Установившееся обтекание шара идеальной несжимаемой жидкостью. Линии тока совпадают с траекториями частиц.

Предположим, что поле скоростей потока известно и мы хотим найти линии тока. По определению вектор скорости направлен по касательной к линии тока. Выделим на линии тока элемент дуги ds, проекции которого на оси координат обозначим через dx, dy, dz. Так как вектор скорости $\boldsymbol{v}$ и вектор $d\boldsymbol{s}$ параллельны, то векторное произведение их равно нулю:

$$d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v} = 0.$$

Записывая это равенство с помощью определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0,$$

находим, что элементы второй и третьей строк пропорциональны:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \qquad (4.5)$$

Таким образом, задача об определении линий тока по заданному полю скоростей приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений.

Переменными в этих уравнениях являются x, y, z, а t есть параметр. Система (4.5) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}, \quad \frac{dx}{v_x}=\frac{dz}{v_z}. \tag{4.6}$$

Общие интегралы этих уравнений можно записать в виде

$$F_1\ (t,\ x,\ y,\ z,\ C_1)=0, \quad F_2\ (t,\ z,\ y,\ z,\ C_2)=0.$$

Каждый из интегралов геометрически изображается семейством поверхностей, зависящих от одного параметра C_1 или C_2, а совокупность двух последних уравнений при фиксированных C_1 и C_2 представляет линию тока как линию пересечения соответствующих поверхностей. При любых C_1 и C_2 два последних уравнения представляют искомое семейство линий тока.

Рассмотрим несколько простейших примеров на определение линий тока по заданному полю скоростей. Одновременно мы познакомимся с некоторыми наиболее простыми, но весьма важными частными случаями движения жидкости.

Пример 1. Рассмотрим поток, который имеет постоянные во всех точках составляющие скорости:

$$v_x=a=\mathrm{const}, \qquad v_y=b=\mathrm{const}, \qquad v_z=c=\mathrm{const}.$$

Такой поток называется *прямолинейно-поступательным* или просто *поступательным потоком*. Очевидно, что линии тока представляют собой семейство параллельных прямых. Нетрудно в этом убедиться и аналитически, путем интегрирования уравнений (4.6). Эти уравнения принимают в данном случае следующий вид:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}.$$

Интегрируя, находим:

$$y=\frac{b}{a}x+C_1, \qquad \left[F_1=y-\frac{b}{a}x-C_1\right],$$

$$z=\frac{c}{a}x+C_2, \qquad \left[F_2=z-\frac{c}{a}x-C_2\right].$$

Первое из уравнений геометрически изображается семейством параллельных друг другу плоскостей, перпендикулярных к плоскости xy, второе — семейством параллельных плоскостей, перпендикулярных к плоскости xz. Пересечения плоскостей одного семейства с плоскостями другого дают семейство параллельных друг другу прямых, которые и являются линиями тока поступательного потока.

Пример 2. Пусть поле скоростей задано следующим образом:

$$v_x=\frac{Q}{4\pi}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$v_y=\frac{Q}{4\pi}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad v_z=\frac{Q}{4\pi}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

где $Q=\mathrm{const}$; требуется определить линии тока.

Составляем для данного примера дифференциальные уравнения линий тока (4. 6):

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z};$$

отсюда

$$\ln y=\ln x+\ln C_1, \qquad \ln z=\ln x+\ln C_2.$$

Потенцируя, находим:

$$y=C_1x \qquad [F_1=y-C_1x],$$
$$z=C_2x \qquad [F_2=z-C_2x].$$

Первый из интегралов геометрически изображается в данном случае семейством плоскостей, проходящих через ось z, а второй — семейством плоскостей, проходящих через ось y. Пересечения плоскостей одного семейства с плоскостями другого представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Эти прямые и являются в данном случае линиями тока и одновременно траекториями частиц. Таким образом, в данном примере жидкость движется по прямым, исходящим во все стороны из начала координат, как из центра. Такое движение называется *источником* жидкости или, точнее, *пространственным источником — точкой*. Точка, из которой исходят линии тока (в данном примере — начало координат), называется центром источника. Физически можно осуществить приблизительно такое движение, подавая жидкость под давлением по тонкой трубке в маленький шарик, в котором по направлению радиусов просверлены отверстия. Если пренебречь влиянием силы тяжести, то линии тока будут приблизительно прямыми линиями, исходящими из центра шарика (рис. 4.4).

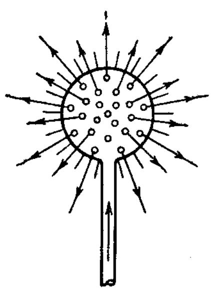

Рис. 4.4. Физическое осуществление пространственного источника.

Исходя из формул для компонент скорости, можно определить величину вектора скорости в любой точке источника, а также выяснить физическое значение константы Q.

Для определения величины вектора скорости имеем:

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=\frac{Q^2}{(4\pi)^2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{Q^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

отсюда

$$v=\frac{Q}{4\pi\rho^2}, \tag{4. 7}$$

где

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Таким образом, в случае пространственного источника скорость убывает при удалении от центра обратно пропорционально квадрату расстояния до центра.

Из формулы (4. 7) следует:

$$Q=4\pi\rho^2v.$$

Здесь $4\pi\rho^2$ есть величина поверхности шара радиуса ρ; так как вектор $\boldsymbol{v}$ в каждой точке направлен по радиусу, то Q представляет собой объем жидкости, который протекает в единицу времени сквозь поверхность сферы радиуса ρ. Если жидкость несжимаема, то Q не должно зависеть от ρ, ибо расход жидкости должен быть одинаков для всех таких сфер.

Таким образом, Q есть некоторая константа, характерная для данного источника. Она называется расходом или интенсивностью данного источника; размерность Q, очевидно, *м³/сек*.

Расход Q можно рассматривать как величину алгебраическую. В том случае, когда Q отрицательно, жидкость движется по тем же линиям тока к некоторому центру. Такое движение, в отличие от случая, когда $Q>0$, носит специальное название *стока* жидкости. Если в резервуар с жидкостью поместить шарик (рис. 4.4) и через трубку отсасывать жидкость, то частицы жидкости будут со всех сторон устремляться к отверстиям, и картина движения будет такая же, как в случае стока жидкости.

Пример 3. Рассмотрим поток, составляющие скорости которого определяются равенствами

$$v_x=\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v_y=\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_z=0,$$

где $Q=\text{const}$. Найдем по этим компонентам скорости форму линий тока. Уравнения (4.6) для данного примера имеют вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0}.$$

Из последнего уравнения заключаем, что $z=\text{const}$, и так как, кроме того, v_x и v_y не зависят от z, то рассматриваемый поток — плоский. Интегрирование пéрвого уравнения дает:

$$\ln y=\ln x+\ln C,$$

откуда

$$y=Cx.$$

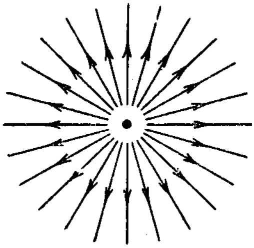

Рис. 4.5. Источник на плоскости.

Линии тока представляют собой лучи, исходящие из начала координат. Этот поток называется *источником на плоскости* или *плоским источником* (при $Q<0$ — *стоком на плоскости* или *плоским стоком*) (рис. 4.5). Точка на плоскости, из которой вытекает во все стороны жидкость (или в которую она со всех сторон втекает), называется центром источника (или стока).

Можно физически представить себе рассматриваемый поток, вообразив весьма длинную по сравнению с поперечными размерами трубку, по которой движется жидкость с одинаковым во всех сечениях давлением. Если в сечениях такой трубки просверлить на равных расстояниях друг от друга радиальные отверстия, то жидкость будет вытекать из них во все стороны. Такое движение приблизительно воспроизводит рассматриваемый поток.

Найдем теперь распределение величины вектора скорости; по формулам для составляющих скорости получаем:

$$v^2=v_x^2+v_y^2=\frac{Q^2}{4\pi^2}\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]=\frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{1}{x^2+y^2},$$

откуда

$$v=\frac{Q}{2\pi r}, \tag{4.8}$$

где r есть расстояние до центра источника. В плоском источнике или стоке скорость убывает при удалении от центра обратно пропорционально первой степени расстояния до него.

Физическое значение постоянной Q здесь аналогично значению одноименной постоянной в случае источника в пространстве. Из последней формулы следует, что

$$Q = 2\pi r\, v.$$

Произведение $2\pi r$ можно рассматривать как боковую поверхность кругового цилиндра с центром в центре источника и высотой, равной единице. Так как вектор скорости направлен вдоль радиуса вектора, то Q представляет собой расход жидкости сквозь эту цилиндрическую поверхность.

По поводу рассмотренных здесь примеров 2 и 3 необходимо заметить, что формулы, с помощью которых заданы составляющие скорости, описывают действительное движение *не во всем пространстве*, занятом жидкостью. В самом деле, если судить по формулам, то получается, что в начале координат скорость равна бесконечности. Такие точки называются *особыми точками* потока. Ясно, однако, по физическим условиям, что в действительном потоке таких точек не может быть. Стало быть, как в самой особой точке, так и в непосредственной близости к ней формулы, определяющие компоненты скорости, не соответствуют действительности.

Несмотря на этот недостаток, формулами, которыми заданы составляющие скорости, пользуются, так как, будучи весьма простыми, эти формулы дают правильное описание потока везде, вне некоторой малой области, окружающей особую точку.

§ 3. Функция тока плоского и симметрично-осевого потока

Интегрирование системы уравнений (4.6) далеко не всегда бывает таким простым, как в примерах, приведенных в предыдущем параграфе. Дифференциальные уравнения линий тока в этих примерах были уравнениями с разделяющимися переменными, а в общем случае, поскольку v_x, v_y, v_z суть функции всех трех координат x, y и z, переменные в уравнениях не могут быть разделены. Поэтому особое значение приобретают такие случаи, когда дифференциальные уравнения линий тока могут быть проинтегрированы в общем виде, т. е. для всех потоков, удовлетворяющих некоторому условию. Мы рассмотрим здесь два наиболее важных из таких случаев, именно случай плоского и случай симметрично-осевого потока несжимаемой жидкости.

I. Плоский поток. Напомним, что плоским потоком называется такой поток, в котором жидкость движется параллельно некоторой плоскости, причем во всех плоскостях, параллельных упомянутой, все явления, характеризующие поток (распределение скоростей, давлений и пр.), совершенно одинаковы. Такой поток имеет место всегда при обтекании весьма длинного по сравнению с поперечными размерами (теоретически бесконечно длинного) цилиндра, если скорость потока направлена перпендикулярно к образующим цилиндра. В авиационных вопросах плоский поток встречается, например, при изучении поступательного движения цилиндрических крыльев.

Так как при обтекании бесконечно длинного цилиндра все явления в плоскостях, перпендикулярных к образующим, одинаковы,