Физическое значение постоянной Q здесь аналогично значению одноименной постоянной в случае источника в пространстве. Из последней формулы следует, что

$$Q = 2\pi r\, v.$$

Произведение $2\pi r$ можно рассматривать как боковую поверхность кругового цилиндра с центром в центре источника и высотой, равной единице. Так как вектор скорости направлен вдоль радиуса вектора, то Q представляет собой расход жидкости сквозь эту цилиндрическую поверхность.

По поводу рассмотренных здесь примеров 2 и 3 необходимо заметить, что формулы, с помощью которых заданы составляющие скорости, описывают действительное движение *не во всем пространстве*, занятом жидкостью. В самом деле, если судить по формулам, то получается, что в начале координат скорость равна бесконечности. Такие точки называются *особыми точками* потока. Ясно, однако, по физическим условиям, что в действительном потоке таких точек не может быть. Стало быть, как в самой особой точке, так и в непосредственной близости к ней формулы, определяющие компоненты скорости, не соответствуют действительности.

Несмотря на этот недостаток, формулами, которыми заданы составляющие скорости, пользуются, так как, будучи весьма простыми, эти формулы дают правильное описание потока везде, вне некоторой малой области, окружающей особую точку.

§ 3. Функция тока плоского и симметрично-осевого потока

Интегрирование системы уравнений (4.6) далеко не всегда бывает таким простым, как в примерах, приведенных в предыдущем параграфе. Дифференциальные уравнения линий тока в этих примерах были уравнениями с разделяющимися переменными, а в общем случае, поскольку v_x, v_y, v_z суть функции всех трех координат x, y и z, переменные в уравнениях не могут быть разделены. Поэтому особое значение приобретают такие случаи, когда дифференциальные уравнения линий тока могут быть проинтегрированы в общем виде, т. е. для всех потоков, удовлетворяющих некоторому условию. Мы рассмотрим здесь два наиболее важных из таких случаев, именно случай плоского и случай симметрично-осевого потока несжимаемой жидкости.

I. Плоский поток. Напомним, что плоским потоком называется такой поток, в котором жидкость движется параллельно некоторой плоскости, причем во всех плоскостях, параллельных упомянутой, все явления, характеризующие поток (распределение скоростей, давлений и пр.), совершенно одинаковы. Такой поток имеет место всегда при обтекании весьма длинного по сравнению с поперечными размерами (теоретически бесконечно длинного) цилиндра, если скорость потока направлена перпендикулярно к образующим цилиндра. В авиационных вопросах плоский поток встречается, например, при изучении поступательного движения цилиндрических крыльев.

Так как при обтекании бесконечно длинного цилиндра все явления в плоскостях, перпендикулярных к образующим, одинаковы, то достаточно изучить поток лишь в одной из этих плоскостей. Примем одну из этих плоскостей за плоскость xy декартовой системы координат, а ось z направим параллельно образующим цилиндра. Тогда условие того, что поток плоский, аналитически запишется в виде:

$$v_x = F_1(x, y, t), \quad v_y = F_2(x, y, t), \quad v_z = 0.$$

Дифференциальные уравнения линий тока (4.6) в случае плоского потока сводятся к одному уравнению

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \tag{4.9}$$

или

$$v_x\,dy - v_y\,dx = 0.$$

Это дифференциальное уравнение может быть приведено в общем виде к квадратурам.

Докажем, что для случая несжимаемой жидкости это есть уравнение в полных дифференциалах и, следовательно, интегрируется непосредственно. Необходимое и достаточное условие того, что $v_x\,dy - v_y\,dx$ есть полный дифференциал некоторой функции x и y, заключается, как известно из курса математики, в равенстве крест-накрест взятых частных производных:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y},$$

что иначе можно написать в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Но для несжимаемой жидкости это условие действительно выполняется, ибо оно представляет собой не что иное, как уравнение неразрывности (гл. II, равенство (2.12)) в частном случае, когда $v_z = 0$ [1]). Следовательно, если жидкость несжимаема, то $v_x\,dy - v_y\,dx$ есть полный дифференциал некоторой функции, которую мы обозначим через $\psi(x, y)$:

$$v_x\,dy - v_y\,dx = d\psi(x, y). \tag{4.10}$$

1) Для плоского установившегося течения газа уравнение (4.9) также может быть проинтегрировано в общем виде. Умножим с этой целью уравнение (4.9) на плотность ρ. Так как для установившегося течения газа $\partial(\rho v_x)/\partial x = -\partial(\rho v_y)/\partial y$, то $\rho v_x\,dy - \rho v_y\,dx$ представляет собою полный дифференциал функции ψ. Следовательно,

$$\rho v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \rho v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

В курсах математики доказывается, что в этом случае функция $\psi(x, y)$ определяется формулой

$$\psi = \int_{y_0}^{y} v_x(x_0, y)\,dy - \int_{x_0}^{x} v_y(x, y)\,dx + C, \tag{4.11}$$

где C — произвольное постоянное, а x_0, y_0 — координаты некоторой начальной точки.

Дифференциальное уравнение линий тока запишется теперь с помощью функции ψ в виде

$$d\psi = 0,$$

а общий его интеграл — в виде

$$\psi(x, y) = \text{const}. \tag{4.12}$$

Последнее равенство представляет собой в конечной форме уравнение семейства линий тока. Итак, определение линий тока для плоского потока несжимаемой жидкости сводится к тому, что по формуле (4. 11) вычисляется вспомогательная функция ψ, которая должна быть затем приравнена произвольной постоянной. Каждому значению этой постоянной тогда будет соответствовать определенная линия тока.

Функция $\psi(x, y)$, определяемая равенством (4.10) или (4.11), называется *функцией тока* плоского потока. С математической точки зрения на функцию тока можно смотреть как на одно из общих решений уравнения неразрывности движения для плоского потока. Нетрудно убедиться, что если известна функция тока, то из нее простым дифференцированием могут быть получены компоненты скорости v_x и v_y, и подстановка этих выражений для v_x и v_y в уравнение неразрывности обращает его в тождество. В самом деле, равенство (4.10) эквивалентно двум равенствам, которые получаются, если сопоставить его с общей формулой для полного дифференциала:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy. \tag{4.13}$$

Так как dx и dy — произвольные приращения координат, то коэффициенты при одноименных приращениях в равенствах (4.9) и (4.13) должны быть соответственно равны между собою. Таким образом, получаются формулы, выражающие компоненты скорости через функцию тока:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4.14}$$

Если теперь подставить эти выражения в уравнение

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

то оно обратится в тождество

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} \equiv 0,$$

так как порядок дифференцирования безразличен в случае непрерывности вторых частных производных (что здесь и предполагается).

Одной этой математической стороной дела не исчерпывается значение функции тока. Она имеет определенный физический смысл, вытекающий из равенств (4.10) и (4.11). Представим себе на плоскости x, y слой жидкости толщиной в единицу длины. Определим объем жидкости, который протекает в этом слое в единицу времени через элементарную площадку с высотой, равной единице длины. Очевидно, что если площадка BB' параллельна оси y (рис. 4.6, *а*) и имеет основание dy, то расход жидкости через такую площадку будет $v_x\,dy$, т. е. оказывается равным первому слагаемому в выражении (4.10) для $d\psi$.

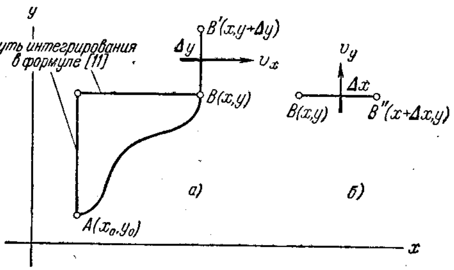

Рис. 4.6. Физический смысл функции тока.

Если площадка BB'' параллельна оси x (рис. 4.6, *б*) и имеет основание dx, то расход жидкости сквозь нее будет $-v_y\,dx$, т. е. равен второму слагаемому в выражении для $d\psi$. Мы поставили здесь знак минус, так как считаем расход жидкости сквозь элементарную площадку положительным, когда скорость, нормальная к площадке, направлена слева направо, если смотреть вдоль положительного направления основания площадки; в данном же случае, если смотреть вдоль оси x, будем видеть положительное v_y направленным справа налево.

Нетрудно видеть, что вся левая часть в равенстве (4.10) представляет собой расход жидкости сквозь элементарную площадку с основанием ds, произвольным образом ориентированным на плоскости xy. В самом деле, расход через такую площадку равен

$$dQ = v_n\,ds \cdot 1 = [v_x \cos(\widehat{x, n}) + v_y \cos(\widehat{y, n})]\,ds,$$

но, как видно из рис. (4. 7),

$$\cos(\widehat{x, n}) = \cos(\widehat{y, s}); \qquad \cos(\widehat{y, n}) = -\cos(\widehat{x, s});$$

следовательно,

$$ds\cos(\widehat{x, n}) = ds\cos(\widehat{y, s}) = dy,$$

$$ds\cos(\widehat{y, n}) = -ds\cos(\widehat{x, s}) = -dx,$$

и

$$dQ = v_x\,dy - v_y\,dx,$$

что совпадает с левой частью равенства (4.10). Таким образом, дифференциал функции тока равен расходу жидкости сквозь упомянутую элементарную площадку:

$$d\psi = dQ.$$

Представим себе теперь непрерывную кривую AB на плоскости xy (рис. 4.6); пусть начальная точка этой кривой $A(x_0, y_0)$ постоянна, а конечная точка $B(x, y)$ переменна.

Расход жидкости через эту кривую (точнее говоря, сквозь цилиндрическую поверхность, высота которой равна единице длины, а направляющей служит кривая AB) есть функция координат x, y конечной точки и выразится в виде криволинейного интеграла, взятого вдоль кривой AB от выражения для элементарного расхода dQ:

$$Q(x, y) = \psi(x, y) = \int_{AB} (v_x\,dy - v_y\,dx).$$

Так как выражение под знаком интеграла есть, вследствие уравнения неразрывности, полный дифференциал, то *интеграл не зависит от формы кривой AB* и при фиксированном положении точки A есть функция лишь координат точки B. Последнее выражение для $\psi(x, y)$ совпадает поэтому с выражением (4.11), где интегрирование сначала ведется вдоль оси y при фиксированном значении $x = x_0$, а затем вдоль оси x при постоянном значении y, как показано на рис. 4.6 [1]). Таким образом, *функция тока плоского потока есть объем жидкости, протекающей в единицу времени через произвольную кривую, проведенную на плоскости x, y между точками $A(x_0, y_0)$ и $B(x, y)$.*

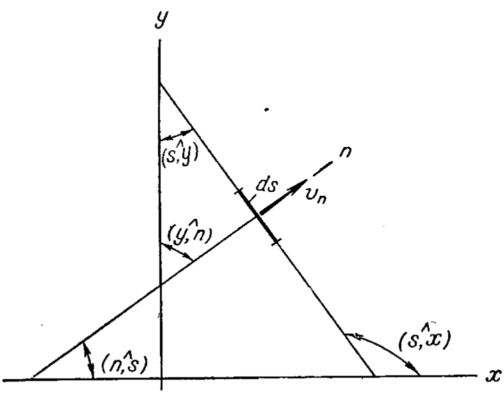

Рис. 4.7. К выводу формулы для расхода жидкости сквозь элементарную площадку.

С точки зрения этого определения функции тока можно физически осмыслить и равенство (4.12), гласящее, что вдоль каждой линии тока функция тока сохраняет постоянное значение. Представим себе, что точка B перемещается вдоль какой-нибудь линии тока (рис. 4.8); очевидно, что какое бы положение B_1 эта точка ни зани-

---

[1]) Константу C в формуле (4.11) нужно при этом считать равной нулю. Лишь при таком условии можно придавать функции ψ, определяемой равенством (4.11), физическое значение расхода жидкости сквозь кривую AB.

мала на линии тока, расход жидкости сквозь кривую AB_1 будет все время один и тот же. В самом деле, расход сквозь кривую AB_1 можно представить как сумму расходов сквозь кривые AB и BB_1, ибо он не зависит от формы кривой:

$$Q_{AB_1} = Q_{AB} + Q_{BB_1}.$$

Но расход сквозь кривую BB_1 равен нулю, так как эта кривая представляет собой отрезок линии тока, а на линии тока нормальная к ней составляющая скорости равна нулю. Следовательно, все время, пока точка B_1 остается на одной и той же линии тока, расход Q_{AB_1} остается равным Q_{AB}, т. е. остается постоянным, а так как этот расход и есть функция тока, то мы получаем, таким образом, что *функция тока равна постоянной величине вдоль линии тока.* Отсюда следует, что количество жидкости, протекающее в единицу времени между двумя произвольными линиями тока, также есть величина постоянная на всем протяжении линий тока и численно равная разности значений констант, соответствующих этим линиям тока. Так, например, количество жидкости, протекающее в единицу времени между линиями тока 2 и 3 на рис. 4.8, равно

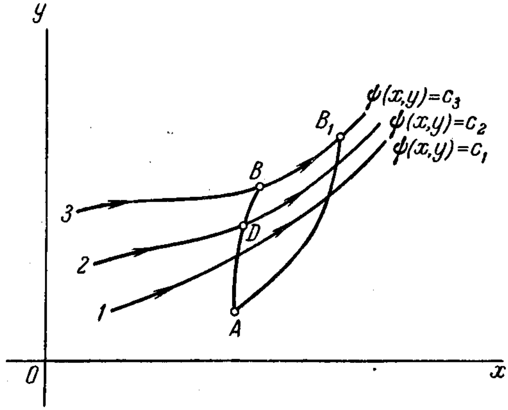

Рис. 4.8. Вдоль линии тока функция тока сохраняет постоянное значение.

$$Q_{AB} - Q_{AD} = C_3 - C_2.$$

Исходя из представления о функции тока как о расходе жидкости сквозь кривую AB, можно получить также и формулы (4.14), выражающие компоненты скорости через функцию тока.

Рассмотрим теперь примеры на определение функции тока плоского потока.

Пример 1. Рассмотрим поступательный поток, текущий со скоростью V. Если направление скорости V принять за ось x, то будем иметь:

$$v_x = V, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

По формуле (4.11), считая $C = 0$, находим функцию тока поступательного потока:

$$\psi = V(y - y_0),$$

или, если положить $y_0 = 0$, то

$$\psi = Vy. \tag{4.15}$$

Уравнение семейства линий тока (4.12) будет иметь вид

$$Vy = \text{const}.$$

Это—семейство прямых, параллельных оси x (рис. 4.9). Расход жидкости между двумя линиями тока здесь пропорционален разности их ординат.

Пример 2. Пусть жидкость движется между двумя параллельными плоскими стенками (рис. 4.10). Так как стенки мы предполагаем неподвижными, то частицы жидкости, соприкасающиеся со стенкой, ввиду наличия сил сцепления между ними и поверхностью стенки, по современным воззрениям, также неподвижны. Таким образом, скорость жидкости на поверхности каждой стенки равна нулю, при удалении от стенок постепенно возрастает и достигает максимума посредине расстояния между стенками.

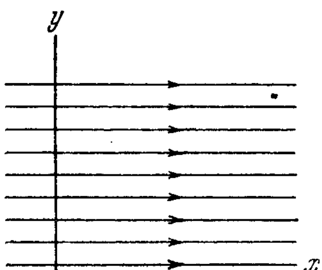

Рис. 4.9. Прямолинейно-поступательный поток.

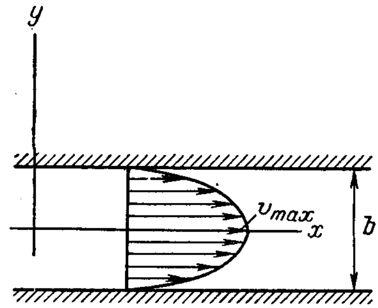

Рис. 4.10. Течение между двумя плоскими параллельными стенками.

Примем, что скорость изменяется по параболическому закону [1]). Для указанной на рис. 4.10 системы координат это выразится следующими равенствами:

$$v_x = v_{\max} - ay^2, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = 0.$$

Коэффициент a должен быть здесь определен из условия на границах потока: при $y = \pm b$, $v_x = 0$; отсюда получается $a = \frac{4v_{\max}}{b^2}$ и, таким образом, окончательно

$$v_x = v_{\max}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right).$$

Найдем для этого потока функцию тока. По формуле (4.11) получаем:

$$\psi = v_{\max}\left[\left(y - y_0\right) - \frac{4}{3}\,\frac{y^3 - y_0^3}{b^2}\right].$$

Линии тока здесь также являются прямыми, параллельными оси x, ибо из равенства $\psi = \text{const}$ следует $y = \text{const}$, но расход между линиями тока изменяется в зависимости от расстояния между ними по более сложному закону, нежели в предыдущем примере. Если бы мы условились чертить линии тока так, чтобы между каждыми двумя соседними линиями протекало в единицу времени одно и то же количество жидкости, то в средней части потока линии тока пришлось бы начертить наиболее густо, чем дальше от середины, тем реже, и наиболее редко — у стенок.

[1]) Этот закон является следствием из закона Ньютона для касательных напряжений.

Пример 3. Вычислим функцию тока для источника на плоскости. По формуле (4.11) получаем:

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\left[x_0\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{x_0^2+y^2}-y\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2+y^2}\right]=$$

$$=\frac{Q}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x_0}-\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y}\right].$$

Но, как видно из рис. (4.11),

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x_0}+\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y}=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2};$$

подставляя в выражение для ψ вместо суммы первого и последнего слагаемых $\frac{\pi}{2}$ и вместо третьего $-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, будем иметь:

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}\right).$$

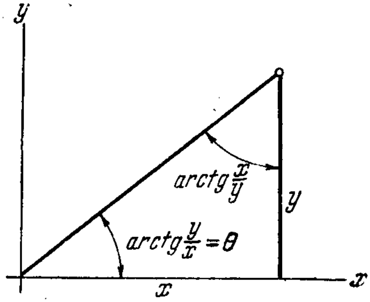

Рис. 4.11. К вычислению функции тока для источника на плоскости.

Если, в частности, положить $y_0=0$, то получим:

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{Q}{2\pi}\theta, \tag{4.16}$$

где θ есть полярный угол.

Уравнение семейства линий тока получим, приравнивая функцию тока произвольной постоянной. Так как из равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\text{const}$$

следует

$$\frac{y}{x}=\text{const},$$

то заключаем, что линии тока представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат.

II. Симметрично-осевой поток. Рассмотрим движение жидкости, обладающее тем свойством, что во всех плоскостях одного и того же пучка, т. е. во всех плоскостях, проходящих через одну и ту же ось, все явления, которыми характеризуется поток (распределение скоростей, давлений и пр.), совершенно одинаковы. Если при этом вектор скорости в каждой точке потока лежит в той плоскости пучка, которая проходит через данную точку, то такой поток называется *симметрично-осевым*. Можно предполагать, что симметрично-осевой поток имеет место всегда при обтекании тела вращения вдоль его оси (рис. 4.12).

При изучении симметрично-осевого потока удобно пользоваться цилиндрической системой координат. Если ось x этой системы направить по оси вращения тела, то поток можно рассматривать как двумерный, так как скорость в каждой точке будет при этом зависеть лишь от координат x, r и не будет зависеть от угла θ между меридиональными плоскостями. Условие того, что поток является симметрично-осевым, математически запишется при этой системе координат в виде

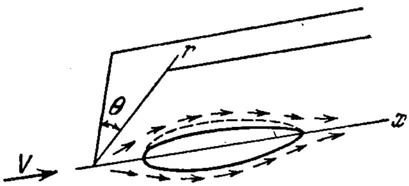

Рис. 4.12. При обтекании тела вращения вдоль оси поток одинаков во всех меридиональных плоскостях.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F_1(x, r, t); \\ v_r &= F_2(x, r, t); \\ v_\theta &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

где v_θ есть компонента скорости, перпендикулярная к меридиональной плоскости.

Дифференциальные уравнения линий тока в цилиндрической системе координат имеют вид, аналогичный уравнениям (4.6) для прямоугольной системы:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dr}{v_r} = \frac{r\,d\theta}{v_\theta}. \tag{4.18}$$

В частности, если поток симметрично-осевой, то из равенства $v_\theta = 0$ следует $r\,d\theta = 0$, откуда $\theta = \text{const}$, т. е. линии тока лежат в меридиональных плоскостях. Вместо двух дифференциальных уравнений в этом случае получается одно:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dr}{v_r},$$

или

$$v_x\,dr - v_r\,dx = 0.$$

Это уравнение, так же как и соответствующее уравнение для плоского потока, можно в случае несжимаемой жидкости проинтегрировать в общем виде. Нетрудно указать для этого уравнения интегрирующий множитель, т. е. такую функцию от x, r, что после умножения на нее левая часть будет представлять собой полный дифференциал. Таким множителем является r. В самом деле, условием того, что выражение

$$rv_x\,dr - rv_r\,dx$$

есть полный дифференциал некоторой функции x и r, является равенство частных производных

$$\frac{\partial (r\,v_x)}{\partial x} = \frac{\partial\,(-rv_r)}{\partial r},$$

которое эквивалентно следующему:

$$r\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}\right)=0.$$

Но для симметрично-осевого потока несжимаемой жидкости это равенство действительно выполняется, так как оно является частным случаем уравнения неразрывности, когда $v_\theta=0$ (гл. II, формула (2.16)). Следовательно, при этих условиях $rv_x dr - rv_r dx$ есть полный дифференциал некоторой функции, которую мы, так же как и для случая плоского потока, обозначим через $\psi(x, r)$ и назовем функцией тока:

$$rv_x dr - rv_r dx = d\psi. \tag{4.19}$$

Функция тока симметрично-осевого потока определится теперь по формуле, аналогичной формуле (4.11):

$$\psi(x, r)=\int_{r_0}^{r} rv_x(x_0, r)\,dr-\int_{x_0}^{x} rv_r(x, r)\,dx, \tag{4.20}$$

где x_0, r_0 суть координаты некоторой начальной точки. Равенство

$$d\psi=0$$

представляет собой дифференциальное уравнение линий тока, а

$$\psi(x, r)=\mathrm{const}$$

— его общий интеграл, т. е. уравнение семейства линий тока в конечной форме.

Формулы, которые выражают составляющие скорости симметрично-осевого потока через функцию тока, получаются, так же как и в случае плоского потока, в результате сопоставления равенства (4.19) и равенства

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial r}dr.$$

Из условия, что коэффициенты при одноименных дифференциалах в обоих выражениях для $d\psi$ должны быть одинаковы, находим [1]):

$$v_x=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4.21}$$

Физический смысл функции тока выясняется здесь аналогично тому, как это было сделано выше для случая плоского потока.

---

[1]) В случае установившегося течения газа уравнение

$$v_x dr - v_r dx = 0$$

также может быть проинтегрировано в общем виде. Интегрирующий множитель в этом случае равен $r\rho$, и компоненты скорости выражаются через функцию тока по формулам

$$\rho v_x=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \rho v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Разница по сравнению с предыдущим заключается лишь в том, что вместо слоя жидкости между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно единице, здесь, т. е. в случае симметрично-осевого потока, нужно рассматривать часть жидкости между двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии, двугранный угол между которыми равен угловой единице (одному радиану).

Представим себе элемент dr на одной из этих плоскостей (рис. 4.13, *а*). Сквозь площадку, образованную поворотом элемента dr вокруг оси x на угол, равный одному радиану, протекает в единицу времени объем жидкости, равный $v_x r \cdot 1 dr$. Это выражение совпадает с первым слагаемым в левой части равенства (4.19).

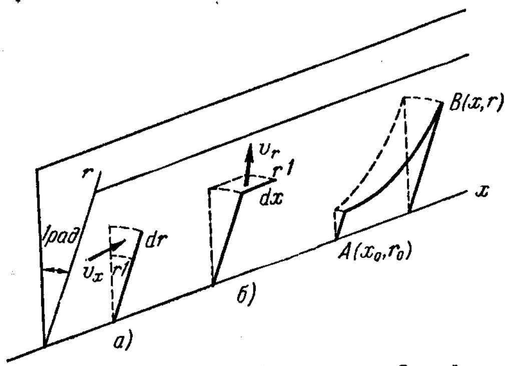

Рис. 4.13. Физический смысл функции тока. Случай симметрично-осевого потока.

Аналогично второе слагаемое представляет собой объем жидкости, протекающий в единицу времени сквозь площадку, образованную поворотом на один радиан элемента dx (рис. 4.13, *б*). Можно установить, подобно тому как это было сделано для случая плоского потока, что сумма обоих слагаемых, т. е. $d\psi$, представляет собой количество жидкости, протекающее в единицу времени сквозь площадку, образованную поворотом элемента ds, произвольным образом ориентированного на меридиональной плоскости. Таким образом, и в данном случае $d\psi = dQ$, и следовательно, функцию тока можно рассматривать как количество жидкости, протекающее в единицу времени сквозь поверхность, образованную поворотом на один радиан произвольной кривой AB, начальная точка которой $A(x_0, r_0)$ зафиксирована, а конечная $B(x, r)$ переменна. Исходя из этого представления, могут быть выведены и формулы (4.21).

Приведем теперь примеры на определение функции тока симметрично-осевого потока.

Пример 4. Рассмотрим поступательный поток, скорость которого равна V. Взяв любую прямую, параллельную вектору скорости, за ось, можем рассматривать поступательный поток не только как плоский, но и как осесимметричный. Функция тока для него будет при этом иметь иное аналитическое выражение, нежели то, которое определяется формулой (4.15). Из формулы (4.20) после подстановки $v_x = V = \text{const}$ получается:

$$\psi = \frac{V(r^2 - r_0^2)}{2};$$

если, в частности, положить $r_0 = 0$, то тогда

$$\psi = \frac{Vr^2}{2}. \tag{4.22}$$

Уравнение семейства линий тока имеет здесь вид $r = \text{const}$. Расход жидкости между двумя линиями тока в данном случае, т. е. когда поступательный поток рассматривается как симметрично осевой, следует иному закону, нежели в случае, когда этот же поток рассматривался как плоский. В случае плоского потока этот расход пропорционален разности ординат линий тока; здесь же расход между двумя линиями тока пропорционален разности квадратов ординат линий тока и, следовательно, может быть представлен в виде

$$\psi = V(r - r_0)\frac{r + r_0}{2}.$$

Последний множитель указывает на то, что при данном значении $r - r_0$ расход между линиями тока возрастает с возрастанием расстояния от оси симметрии. Это нетрудно понять, если принять во внимание, что когда речь шла о поступательном потоке как о плоском, то определялся расход жидкости между плоскостями $y = \text{const}$ и $y_0 = \text{const}$; в данном же случае функция тока соответствует расходу между двумя коаксиальными круговыми цилиндрами: $r = \text{const}$ и $r_0 = \text{const}$.

Пример 5. Вычислим функцию тока пространственного источника. Для этого можно применить к данному частному случаю общую формулу (4.20); предоставляя это сделать читателю, мы дадим здесь несколько иной вывод, используя наиболее удобную для этого примера систему координат.

Введем в плоскости x, r цилиндрической системы координат полярные координаты ρ, ϑ; направим при этом ось полярной системы вдоль оси x и совместим полюс с началом координат цилиндрической системы.

Возьмем на плоскости x, r элемент дуги Δs, образованный поворотом конца радиуса-вектора ρ на угол $\Delta\vartheta$; при повороте этой дуги вокруг оси x на угол, равный одному радиану, получится площадка, равная $\rho\Delta\vartheta r \cdot 1$. Расход жидкости через эту площадку равен

$$\Delta\psi = v_\rho \rho r \Delta\vartheta,$$

где v_ρ есть составляющая скорости вдоль радиуса-вектора.

Отсюда для v_ρ получается выражение, которое после перехода к пределу (при $\Delta\vartheta \to 0$) примет вид

$$v_\rho = \frac{1}{r\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

Аналогично находим выражение через функцию тока для составляющей скорости v_ϑ по направлению, перпендикулярному к ρ:

$$v_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}.$$

Применим эти общие формулы к пространственному источнику. Так как в этом случае $v_\vartheta = 0$, то ψ не зависит от ρ, и поэтому в формуле для v_ρ можно вместо частной производной писать обыкновенную. Сопоставляя выражение v_ρ через функцию тока с формулой (4.7), получаем:

$$\frac{1}{\rho r}\frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{Q}{4\pi\rho^2}.$$

Здесь $r = \rho \sin\vartheta$ и, следовательно,

$$d\psi = \frac{Q}{4\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta;$$

интегрируя, находим следующее выражение для функции тока пространственного источника:

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi}\cos\vartheta.$$

Как обычно в формулах для функции тока, мы не пишем здесь постоянной интегрирования, так как она не существенна ни для вычисления скоростей, ни для вычисления расходов жидкости. Если это необходимо, то постоянную интегрирования можно всякий раз определить из того или иного дополнительного условия. Например, поставив условие, чтобы ψ обращалось в нуль при $\vartheta = 0$ (т. е. чтобы $\vartheta = 0$ было «нулевой» линией тока), получим:

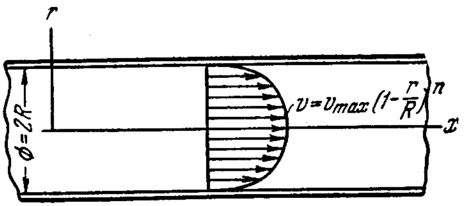

Рис. 4.14. Движение жидкости по круглой цилиндрической трубе.

$$\psi = \frac{Q}{4\pi}(1 - \cos\vartheta).$$

Пример 6. Вычислим функцию тока для случая движения жидкости по круглой цилиндрической трубе радиуса R (рис. 4. 14). Экспериментально установлено, что для обычных в технике размеров труб и скоростей движения жидкости (точнее, для так называемого турбулентного движения) распределение скоростей по сечению трубы с достаточной для технических целей точностью может быть выражено степенным законом:

$$v_x = v_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^n, \quad v_r = 0.$$

Здесь r есть величина положительная, так как в цилиндрической системе координат, которой мы здесь пользуемся, угол θ изменяется в пределах $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Показатель степени n здесь изменяется в зависимости от размеров трубы и скорости потока; как показывают опыты, $\frac{1}{10} \leqslant n \leqslant \frac{1}{7}$.

По формуле (4.20) мы находим:

$$\psi = v_{\max}\int_{r_0}^{r} r\left(1 - \frac{r}{R}\right)^n dr.$$

Введем здесь подстановку $1 - r/R = z$ и обозначим через z_0 величину z, соответствующую r_0; тогда получим:

$$\psi = v_{\max} R^2 \int_{z_0}^{z} (z-1)\, z^n\, dz = v_{\max} R^2 \left(\frac{z^{n+2}}{n+2} - \frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{z_0}^{z}.$$

Этой формулой можно воспользоваться, в частности, для вычисления полного расхода жидкости по трубе Q. Функция тока представляет собой расход между двумя проходящими через ось трубы плоскостями, двугранный угол между которыми равен одному радиану. Следовательно, для вычисления Q нужно ψ умножить на 2π и в формуле для ψ положить $z_0 = 1$ (что соответствует $r_0 = 0$) и $z = 0$ (что соответствует $r = R$); тогда будем иметь:

$$Q = 2\pi\psi = \pi R^2 v_{\max}\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Отношение $Q/\pi R^2$ равно средней по сечению скорости движения по трубе $v_{\text{ср}}$; таким образом, из последнего равенства мы получаем формулу, по которой средняя скорость $v_{\text{ср}}$ может быть определена в долях максимальной $v_{\max}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} v_{\max}.$$

Подставляя сюда вместо n его крайние значения $n = 1/7$ и $n = 1/10$, находим значения коэффициента при $v_{\max}$, соответственно равные $0,816$ и $0,903$.

§ 4. Скорости деформации и угловые скорости вращения жидкой частицы

В предыдущих параграфах мы познакомились с общими способами описания жидкого потока с помощью понятий о линии тока и функции тока. При этом мы применяли главным образом метод Эйлера. Однако более глубокое понимание законов движения жидкости, а также правильная классификация движений возможны лишь на основе анализа поведения и, в частности, деформаций отдельной жидкой частицы. Естественно, что при таком анализе нужно будет применять метод Лагранжа. Применение этого метода будет заключаться в том, что мы выделим элементарный жидкий объем, т. е. такой объем, который во все время движения состоит из одних и тех же частиц, и будем исследовать скорости его деформаций.

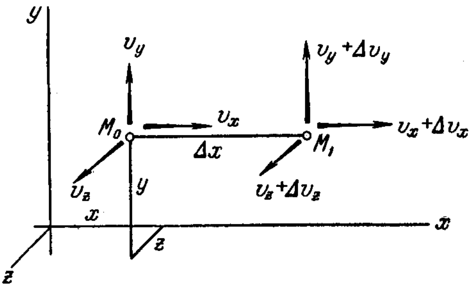

Рис. 4.15. Движение элементарного жидкого отрезка. Отрезок движется поступательно вместе с точкой M_0, растягивается или сжимается и вращается вокруг оси, проходящей через точку M_0.

Представим себе, в соответствии с применяемой нами прямоугольной системой координат, что жидкий объем имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны Δx, Δy, Δz. Рассмотрим движение одного из этих ребер, например Δx; выводы, которые мы получим, будут относиться с соответствующими изменениями в обозначениях и к другим ребрам.

Обозначим составляющие скорости в начальной точке M_0 (рис. 4. 15) через v_x, v_y, v_z. Составляющие скорости в конечной точке M_1 ребра Δx в тот же момент времени будут соответственно равны $v_x + \Delta v_x$, $v_y + \Delta v_y$, $v_z + \Delta v_z$. Если бы этих приращений скорости Δv_x, Δv_y, Δv_z не было, отрезок Δx двигался бы поступательно. Наличие этих приращений влечет за собой дополнительные движения отрезка Δx. В самом деле, величины Δv_x, Δv_y, Δv_z можно рассматривать как относительные скорости конечной точки M_1 отрезка по отношению к начальной; вследствие относительного движения точки M_1