Отношение $Q/\pi R^2$ равно средней по сечению скорости движения по трубе $v_{ср}$; таким образом, из последнего равенства мы получаем формулу, по которой средняя скорость $v_{ср}$ может быть определена в долях максимальной v_{max}:

$$v_{ср} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} v_{max}.$$

Подставляя сюда вместо n его крайние значения $n = 1/7$ и $n = 1/10$, находим значения коэффициента при v_{max}, соответственно равные $0,816$ и $0,903$.

§ 4. Скорости деформации и угловые скорости вращения жидкой частицы

В предыдущих параграфах мы познакомились с общими способами описания жидкого потока с помощью понятий о линии тока и функции тока. При этом мы применяли главным образом метод Эйлера. Однако более глубокое понимание законов движения жидкости, а также правильная классификация движений возможны лишь на основе анализа поведения и, в частности, деформаций отдельной жидкой частицы. Естественно, что при таком анализе нужно будет применять метод Лагранжа. Применение этого метода будет заключаться в том, что мы выделим элементарный жидкий объем, т. е. такой объем, который во все время движения состоит из одних и тех же частиц, и будем исследовать скорости его деформаций.

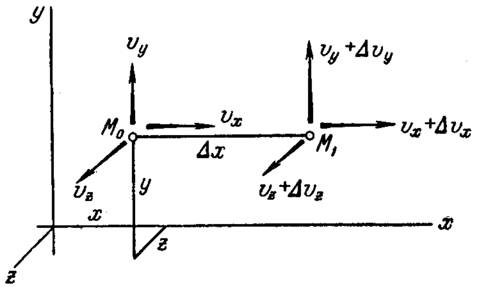

Рис. 4.15. Движение элементарного жидкого отрезка. Отрезок движется поступательно вместе с точкой M_0, растягивается или сжимается и вращается вокруг оси, проходящей через точку M_0.

Представим себе, в соответствии с применяемой нами прямоугольной системой координат, что жидкий объем имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны Δx, Δy, Δz. Рассмотрим движение одного из этих ребер, например Δx; выводы, которые мы получим, будут относиться с соответствующими изменениями в обозначениях и к другим ребрам.

Обозначим составляющие скорости в начальной точке M_0 (рис. 4. 15) через v_x, v_y, v_z. Составляющие скорости в конечной точке M_1 ребра Δx в тот же момент времени будут соответственно равны $v_x + \Delta v_x$, $v_y + \Delta v_y$, $v_z + \Delta v_z$. Если бы этих приращений скорости Δv_x, Δv_y, Δv_z не было, отрезок Δx двигался бы поступательно. Наличие этих приращений влечет за собой дополнительные движения отрезка Δx. В самом деле, величины Δv_x, Δv_y, Δv_z можно рассматривать как относительные скорости конечной точки M_1 отрезка по отношению к начальной; вследствие относительного движения точки M_1

по отношению к M_0 вдоль отрезка Δx происходит, очевидно, растяжение или сжатие отрезка; вследствие относительного движения M_1 по отношению к M_0 в направлении, перпендикулярном к Δx, происходит поворот отрезка вокруг точки M_0.

Рассмотрим сначала движение, происходящее от линейной деформации отрезка (т. е. от его растяжения или сжатия). Так как скорость линейной деформации, равная Δv_x, получается на отрезке длиною Δx, то для того, чтобы охарактеризовать эту скорость, естественно разделить Δv_x на Δx. Мы будем иметь тогда удельную скорость линейной деформации, т. е. скорость, приходящуюся на единицу длины. Желая получить характеристику скорости линейной деформации, не зависящую от случайного значения Δx, перейдем к пределу, устремляя Δx к нулю. В пределе получим удельную скорость линейной деформации вдоль оси x в точке M_0; обозначив ее через i_x, можем написать:

$$i_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Рассуждая аналогично по отношению к отрезкам Δy и Δz, получим, что удельные скорости линейной деформации вдоль осей y и z равны в точке M_0 соответственно

$$i_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \qquad i_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Как известно из гл. II, скорость удельной объемной деформации в данной точке равна

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Каждое слагаемое в правой части представляет собою удельную скорость линейной деформации в данной точке в направлении соответствующей оси координат. Последнее равенство позволяет, таким образом, сформулировать следующее положение: *во всякой точке жидкой среды скорость удельной объемной деформации равна сумме удельных скоростей линейной деформации по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям.*

Рассмотрим теперь движение отрезка Δx, происходящее от приращений скорости Δv_y и Δv_z. От приращения скорости Δv_y возникает вращение отрезка вокруг точки M_0 в плоскости, параллельной xy (вокруг оси, параллельной оси z и проходящей через M_0), а от приращения скорости Δv_z — вращение в плоскости, параллельной xz (вокруг оси, параллельной y). Нетрудно вычислить угловые скорости отрезка Δx в каждой из этих плоскостей. Для этого нужно разделить относительные скорости точки M_1 по отношению к точке M_0, т. е. Δv_y и Δv_z на радиус поворота Δx. Имея в виду получить значения угловых скоростей, не зависящие от произвольно взятого Δx, следует затем перейти к пределу, уменьшая Δx до нуля. В пределе, при $\Delta x \to 0$, угловые скорости вращения отрезка M_0M_1 будут соответственно равны значениям частных производных $\partial v_y/\partial x$ и $\partial v_z/\partial x$ в точке M_0.

Все, что было здесь изложено по поводу ребра M_0M_1, относится, с соответствующим изменением обозначений, и к двум другим ребрам. Везде производные по координате, одноименной с составляющей скорости, представляют собой удельные скорости линейной деформации, а производные по координате, разноименной с составляющей скорости, — угловые скорости вращения (рис. 4.16). Движение трех взаимно перпендикулярных элементарных отрезков, исходящих из начальной точки M_0, полностью определяются значениями в этой точке следующих девяти частных производных:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

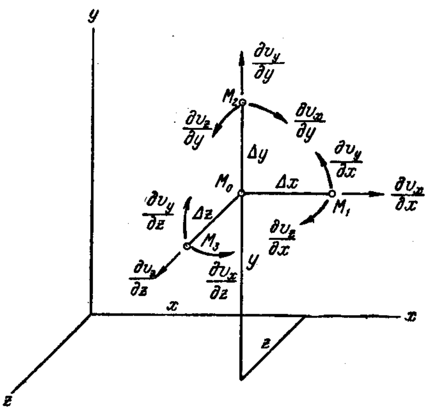

Рис. 4.16. Частные производные от составляющих скорости по одноименной координате характеризуют скорости линейной деформации отрезков, а производные от составляющих скорости по разноименной координате — угловые скорости вращения отрезков.

Можно доказать, что движение любого другого элементарного отрезка, исходящего из той же точки, также определяется значениями этих девяти частных производных. Таким образом, эти девять производных полностью определяют движение всех точек частицы по отношению к начальной точке M_0.

Следует, однако, обратить внимание на то, что ни одна из этих частных производных, взятая отдельно, не характеризует вращения выделенной частицы в целом. Если бы это была частица твердого тела, то угловая скорость вращения одного отрезка в какой-нибудь плоскости определяла бы угловую скорость вращения всей частицы относительно оси, перпендикулярной к этой плоскости. Вращение же жидкой частицы относительно каждой из осей координат характеризуется соответствующими угловыми скоростями двух отрезков. Таким образом, понятие об угловой скорости вращения жидкой частицы непосредственно не вытекает из механики твердого тела и нуждается поэтому в особом определении. Конечно, это определение нужно построить так, чтобы оно не противоречило определениям механики твердого тела. Наиболее удачное определение понятия вращения жидкой частицы было дано Гельмгольцем[1]). Он предложил определять компоненты ω_x, ω_y, ω_z угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ частицы как средние арифметические из соответствующих компонент угловой скорости ребер. Если условиться, что компоненты угловой скорости частицы считаются положительными при вращении соответственно от оси x к оси y, от оси y к оси z и от оси z к оси x, то знаки производных $\partial v_y/\partial x$, $\partial v_z/\partial y$, $\partial v_x/\partial z$ будут совпадать со знаками угловой скорости, а знаки производных $\partial v_x/\partial y$, $\partial v_y/\partial z$, $\partial v_z/\partial x$ будут противоположны знакам угловой скорости.

Определяя компоненты угловой скорости вращения частицы (они называются иначе компонентами вихря) как средние арифметические из соответствующих угловых скоростей ребер, получаем для этих компонент следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\\ \omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.23}$$

Нетрудно показать, что каждая из этих формул определяет собой угловую скорость вращения (в обычном смысле механики твердого тела) биссектрисы угла при точке M_0 в соответствующей грани параллелепипеда. Так, например, ω_z, определенное по третьей из этих формул, можно рассматривать как угловую скорость вращения биссектрисы угла между ребрами M_0M_1 и M_0M_2. В самом деле, для того чтобы прямая, проходящая в грани $M_0M_1M_2$ через точку M_0, оставалась все время биссектрисой угла между упомянутыми ребрами, она должна при всяком повороте каждого из этих ребер поворачиваться в том же направлении на половинный угол. Ее угловая скорость должна, следовательно, равняться полусумме угловых скоростей ребер, т. е. должна равняться $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$. Аналогичную интерпретацию можно дать и двум другим формулам.

Так как в общем случае угловые скорости вращения разных ребер параллелепипеда, как мы видели, различны, то углы между ребрами, бывшие в начальный момент времени прямыми, при движении изменяются и грани параллелепипеда скашиваются. Зная угловые ско-

---

[1]) H. v. Helmholtz, Über Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 55, 1858. Определение, аналогичное определению Гельмгольца, было дано Коши еще в 1815 г., однако Гельмгольцу принадлежит теоретическое обоснование этого определения и, в частности, указание на то, что лишь при таком определении можно рассматривать вращения в несжимаемой жидкости как результат действия сил, не имеющих потенциала (сил трения).

рости вращения ребер, можно вычислить и скорость изменения углов между ребрами, т. е. скорость деформации сдвига. Очевидно, что скорость изменения угла между каждой парой ребер складывается из угловых скоростей вращения этих ребер. Если условиться, что скорость изменения угла между ребрами считается положительной при уменьшении его, то знаки всех частных производных, изображающих угловые скорости вращения ребер, будут одинаковы со знаком скорости изменения угла. Таким образом, мы получаем следующие выражения для скоростей изменения углов между ребрами параллелепипеда: $\partial v_z/\partial y + \partial v_y/\partial z$ — для скорости изменения угла между ребрами M_0M_2 и M_0M_3; $\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x$ — для скорости изменения угла между ребрами M_0M_1 и M_0M_3; $\partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y$ — для скорости изменения угла между ребрами M_0M_1 и M_0M_2.

Обычно в целях симметрии с формулами для компонент вихря, скорости угловой деформации в плоскостях, параллельных плоскостям координат, характеризуют величинами ε_x, ε_y, ε_z, каждая из которых равна половине соответствующей скорости изменения угла между ребрами:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \quad (4.24)$$

Значки x, y, z при букве ε не следует понимать здесь как символы проекции; они указывают лишь направление перпендикуляра к площадке, в которой происходит перекашивание грани. Вообще можно доказать, что величины ε_x, ε_y, ε_z не определяют собой какой-либо вектор. Если рассматривать их как проекции вектора, то этот вектор будет зависеть от системы координат и, следовательно, от формы выделяемого в жидкости элемента. Поскольку это противоречит природе векторной величины, то и не следует рассматривать ε_x, ε_y, ε_z как проекции вектора.

Формулы (4. 24) позволяют объяснить смысл введения коэффициента $1/2$ в формулы (4. 23) для компонент угловой скорости. Представим себе, что частицы жидкости мгновенно отвердели, т. е. стали двигаться без перекашивания углов. В этом случае

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial z}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (4. 23), получим в этом случае компоненты угловой скорости в следующем виде:

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \qquad \omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \qquad \omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

что находится в полном согласии с механикой твердого тела.

В результате вращения, линейной деформации и перекашивания граней выделенный в жидкости элементарный объем, который в начальный момент времени имел форму прямоугольного параллелепипеда, через малый промежуток времени dt будет иметь совсем иную форму. Представление об этой форме дает рис. 4.17, на котором изображены проекции выделенного объема на одну из плоскостей координат в начальный момент времени t_0 и в момент времени $t_0 + dt$.

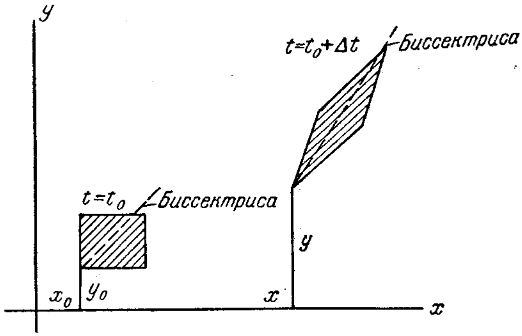

Рис. 4.17. Перенос, вращение и деформация элементарного жидкого объема за малый промежуток времени.

Для уяснения понятий угловой скорости вращения жидкой частицы, скорости линейной и угловой деформации приведем следующие примеры.

Пример 1. Вычислим скорости линейной деформации для плоского источника. В случае плоского источника составляющие скорости вдоль радиуса-вектора и перпендикуляра к нему соответственно равны

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \qquad v_\theta = 0.$$

Скорость линейной деформации вдоль радиуса-вектора равна

$$i_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r^2}.$$

Таким образом, в случае плоского источника (при $Q > 0$) частицы в радиальном направлении сжимаются, а в случае стока ($Q < 0$) растягиваются со скоростью, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра.

Скорость линейной деформации в направлении, перпендикулярном к радиусу-вектору, равна сумме двух слагаемых: одно происходит оттого, что элемент дуги $r\Delta\theta$ имеет на своих концах, вообще говоря, различные скорости v_θ, другое — оттого, что элемент дуги $r\Delta\theta$ перемещается в направлении, перпендикулярном к самому себе, со скоростью v_r. Если через Δv_θ обозначить разность составляющих скорости, перпендикулярных к радиусу-вектору в начале и конце элемента $r\Delta\theta$, то средняя в пределах элемента скорость линейной деформации, происходящая от этой разности, запишется в виде $\Delta v_\theta / r\Delta\theta$. Вследствие перемещения элемента $r\Delta\theta$ в направлении, перпендикулярном к самому себе, его длина за время Δt получит приращение, равное $v_r \, \Delta t \, \Delta\theta$; деля это приращение на Δt и первоначальную длину элемента, получим, что скорость линейной деформации, происходящая от указанного перемещения, равна v_r/r. Полная скорость линейной деформации элемента в направлении, перпендикулярном к радиусу-вектору, выразится формулой

$$i_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}.$$

В рассматриваемом примере по этой формуле получается:

$$i_\theta = \frac{Q}{2\pi r^2},$$

т. е. в направлении, перпендикулярном к радиусу-вектору, частицы в случае источника растягиваются, а в случае стока сжимаются.

Пример 2. Рассмотрим движение жидкости по круглой цилиндрической трубе радиуса R. Предположим, что во всех точках скорость направлена вдоль оси трубы и распределена по ее сечению по параболическому закону. Значение скорости на оси трубы обозначим через $v_{\max}$; расстояние точки от оси — через r. На поверхности стенки трубы (т. е. при $r = R$) скорость полагаем равной нулю. Параболический закон, удовлетворяющий этим условиям, можно записать, как мы уже видели раньше, в виде

$$v_x = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \qquad v_r = 0.$$

Вычислим для этого случая угловые скорости вращения частиц. Введем декартову систему координат, ось x которой направим по оси трубы; тогда

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

и формулы для составляющих скорости примут вид

$$v_x = v_{\max}\left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2}\right), \qquad v_y = v_z = 0.$$

В данном случае

$$\omega_x = 0, \ \omega_y = \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{v_{\max}}{R^2}z; \ \omega_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v_{\max}}{R^2}y.$$

Отсюда находим, что величина вектора угловой скорости равна

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{v_{\max}}{R^2}\sqrt{y^2 + z^2} = v_{\max}\frac{r}{R^2};$$

она пропорциональна скорости на оси трубы, обратно пропорциональна квадрату ее радиуса, равна нулю на оси трубы и достигает максимума на стенках. Вдоль радиуса угловая скорость распределена по линейному закону.

Так как вектор ω лежит в плоскости поперечного сечения трубы ($\omega_x = 0$), то направление его можно охарактеризовать углом, который он составляет, например, с осью z. Тангенс этого угла равен

$$\frac{\omega_y}{\omega_z} = -\frac{z}{y}.$$

Отсюда видно, что вектор ω перпендикулярен к радиусу-вектору r рассматриваемой точки (лежащему в плоскости поперечного сечения), ибо радиус-вектор составляет с осью z угол, тангенс которого равен y/z и, следовательно, по величине и знаку обратен ω_y/ω_z.

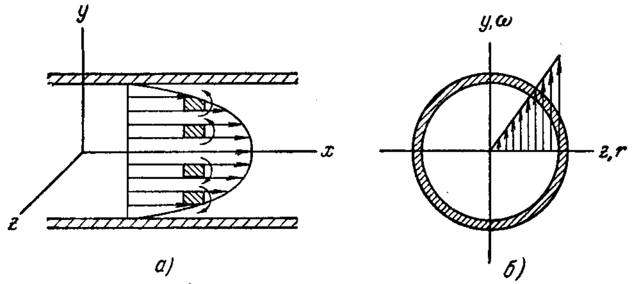

Рис. 4.18. Движение жидкости в цилиндрической трубе: *а*) вследствие торможения струек стенками каждая частица вращается; *б*) угловые скорости вращения частиц для одного сечения.

Таким образом, каждая частица жидкости, движущаяся (прямолинейно) по трубе, имеет вполне определенную по величине и направлению угловую скорость вращения (рис. 4.18). Прямолинейность линий тока, как мы видим, не влечет за собой отсутствия вращений частиц.

§ 5. Теорема Гельмгольца о движении жидкой частицы в общем случае

Мы рассмотрели в предыдущем параграфе некоторые частные виды движения жидкой частицы: линейную деформацию (т. е. растяжение или сжатие), вращение и деформацию скашивания (угловую). Возникает вопрос, исчерпываются ли все случаи движения жидкой частицы уже рассмотренными, или же существуют такие движения ее, которые не приводятся к рассмотренным.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, исследуем общий случай движения жидкой частицы. Представим себе частицу произвольной формы, выделенную в жидкости; возьмем в ней некоторую начальную точку M_0 и выразим скорость любой точки M той же частицы через скорость начальной точки M_0.

Мы предполагаем здесь, что, вообще говоря, все три координаты точки M отличаются от соответствующих координат точки M_0, тогда как раньше, изучая частные случаи движения, мы рассматривали точки, отличающиеся от начальной значением лишь одной из трех координат. Обозначим скорость в начальной точке $M_0(x, y, z)$ через $\boldsymbol{v}_0$, а скорость в точке $M(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ через $\boldsymbol{v}$. Разложим компоненты скорости $\boldsymbol{v}$ в ряд Тейлора по степеням приращений координат Δx, Δy, Δz и ограничимся, ввиду малости этих приращений, членами, которые содержат их первые степени:

$$v_x = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z,$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z,$$

$$v_z = v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z.$$

Из этих разложений видно, что движение любой точки M выделенной частицы можно рассматривать как составное из двух движений: поступатель-