радиус-вектор составляет с осью z угол, тангенс которого равен y/z и, следовательно, по величине и знаку обратен ω_y/ω_z.

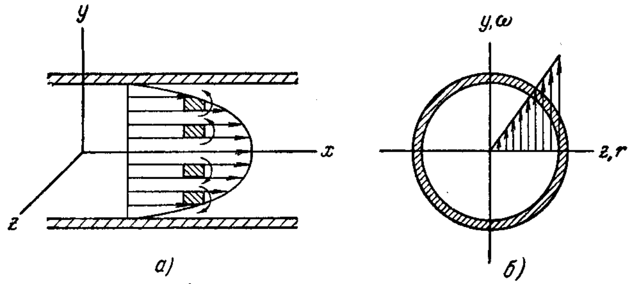

Рис. 4.18. Движение жидкости в цилиндрической трубе: *а*) вследствие торможения струек стенками каждая частица вращается; *б*) угловые скорости вращения частиц для одного сечения.

Таким образом, каждая частица жидкости, движущаяся (прямолинейно) по трубе, имеет вполне определенную по величине и направлению угловую скорость вращения (рис. 4.18). Прямолинейность линий тока, как мы видим, не влечет за собой отсутствия вращений частиц.

§ 5. Теорема Гельмгольца о движении жидкой частицы в общем случае

Мы рассмотрели в предыдущем параграфе некоторые частные виды движения жидкой частицы: линейную деформацию (т. е. растяжение или сжатие), вращение и деформацию скашивания (угловую). Возникает вопрос, исчерпываются ли все случаи движения жидкой частицы уже рассмотренными, или же существуют такие движения ее, которые не приводятся к рассмотренным.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, исследуем общий случай движения жидкой частицы. Представим себе частицу произвольной формы, выделенную в жидкости; возьмем в ней некоторую начальную точку M_0 и выразим скорость любой точки M той же частицы через скорость начальной точки M_0.

Мы предполагаем здесь, что, вообще говоря, все три координаты точки M отличаются от соответствующих координат точки M_0, тогда как раньше, изучая частные случаи движения, мы рассматривали точки, отличающиеся от начальной значением лишь одной из трех координат. Обозначим скорость в начальной точке $M_0(x, y, z)$ через $\boldsymbol{v}_0$, а скорость в точке $M(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ через $\boldsymbol{v}$. Разложим компоненты скорости $\boldsymbol{v}$ в ряд Тейлора по степеням приращений координат Δx, Δy, Δz и ограничимся, ввиду малости этих приращений, членами, которые содержат их первые степени:

$$v_x = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z,$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z,$$

$$v_z = v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z.$$

Из этих разложений видно, что движение любой точки M выделенной частицы можно рассматривать как составное из двух движений: поступательного движения по траектории *вместе с начальной точкой* M_0 (со скоростями v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) и движения *относительно точки* M_0, скорости которого определяются последними тремя слагаемыми в каждой строке. Те из слагаемых, которые расположены по диагонали составляемой ими таблицы, расшифровываются, как мы знаем, как скорости линейной деформации. Для того чтобы расшифровать и другие из этих слагаемых, выразим входящие в них производные через угловые скорости вращения и полускорости скашивания. Из формул (4.23) и (4.24) следует:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \varepsilon_x + \omega_x, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \varepsilon_x - \omega_x,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \varepsilon_y + \omega_y, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \varepsilon_y - \omega_y,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \varepsilon_z + \omega_z, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \varepsilon_z - \omega_z.$$

Подставляя эти выражения вместо соответствующих производных в разложения компонент скорости точки M, получаем:

$$v_x = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\Delta x + (\varepsilon_y \Delta z + \varepsilon_z \Delta y) + (\omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y),$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\Delta y + (\varepsilon_z \Delta x + \varepsilon_x \Delta z) + (\omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z),$$

$$v_z = v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\Delta z + (\varepsilon_x \Delta y + \varepsilon_y \Delta x) + (\omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x).$$

По известным из кинематики формулам Эйлера последние слагаемые в правых частях (заключенные в скобки) представляют собой компоненты скорости точки M, которые происходят от вращательного движения частицы вокруг оси, проходящей через начальную точку M_0. Аналогично предпоследние слагаемые можно рассматривать как компоненты скорости точки M, происходящие от деформации скашивания частицы. Мы приходим, таким образом, к следующей *теореме Гельмгольца*:

Движение любой точки жидкой частицы можно рассматривать как результат сложения поступательного движения по траектории вместе с некоторой начальной точкой, вращательного движения вокруг оси, проходящей через начальную точку, и деформационного движения, которое в свою очередь состоит из линейной деформации и деформации скашивания.

Предыдущие три равенства дают аналитическое выражение этой теоремы.

Итак, движение жидкой частицы может быть в общем случае разложено на поступательное движение, вращательное движение и движение от деформации. Этими тремя видами исчерпываются все возможные случаи движения жидкой частицы. Конечно, такое разложение движения на простейшие не является единственным, — возможны и другие разложения. Но, как показал Гельмгольц, такое разложение наиболее правильно с динамической точки зрения: оно разделяет те движения, которые происходят от сил разной природы. Мы увидим далее, в динамике жидкости, что силы, имеющие потенциал (сила тяжести, сила гидродинамического давления и др.), не могут вызвать в несжимаемой жидкости вращения частиц.

Вращательное движение частиц может быть вызвано в несжимаемой жидкости лишь силами, не имеющими потенциала, например силами трения.