§ 6. Эллипсоид скоростей деформации

Рассмотрим теперь несколько подробнее движение, происходящее от деформации частицы. Можно доказать, что компоненты скорости, происходящие от деформации, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x+\varepsilon_y\Delta z+\varepsilon_z\Delta y,\\ &\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_z\Delta x+\varepsilon_x\Delta z,\\ &\frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_x\Delta y+\varepsilon_y\Delta x,\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

определяют собой некоторый вектор, называемый обычно *скоростью чистой деформации в точке* M_0, который обладает тем свойством, что *его проекция на любое направление* l, *исходящее из точки* M_0, *равна скорости линейной деформации вдоль этого направления*. Мы убедимся в этом, вычисляя скорость линейной деформации жидкости в направлении l. Как известно, удельные скорости линейной деформации вдоль осей координат изображаются соответственно частными производными $\partial v_x/\partial x$, $\partial v_y/\partial y$, $\partial v_z/\partial z$. Аналогично удельная скорость линейной деформации вдоль направления l изображается частной производной $\partial v_l/\partial l$.

Рассматривая v_l как сумму проекций на направление l компонент скорости по осям координат, можем написать:

$$v_l=v_x\cos(\widehat{x,\ l})+v_y\cos(\widehat{y,\ l})+v_z\cos(\widehat{z,\ l})$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}=\frac{\partial v_x}{\partial l}\cos(\widehat{x,\ l})+\frac{\partial v_y}{\partial l}\cos(\widehat{y,\ l})+\frac{\partial v_z}{\partial l}\cos(\widehat{z,\ l}).$$

Но каждую из производных в правой части можно, в свою очередь, выразить через производные по x, y, z:

$$\frac{\partial v_x}{\partial l}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dl}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dl}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dl}=$$
$$=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos(\widehat{x,\ l})+\frac{\partial v_x}{\partial y}\cos(\widehat{y,\ l})+\frac{\partial v_x}{\partial z}\cos(\widehat{z,\ l})$$

и аналогично:

$$\frac{\partial v_y}{\partial l}=\frac{\partial v_y}{\partial x}\cos(\widehat{x,\ l})+\frac{\partial v_y}{\partial y}\cos(\widehat{y;\ l})+\frac{\partial v_y}{\partial z}\cos(\widehat{z,\ l}),$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial l}=\frac{\partial v_z}{\partial x}\cos(\widehat{x,\ l})+\frac{\partial v_z}{\partial y}\cos(\widehat{y,\ l})+\frac{\partial v_z}{\partial z}\cos(\widehat{z,\ l}).$$

Подставим эти выражения в равенство для $\partial v_l/\partial l$; тогда после приведения членов, содержащих одинаковые косинусы, получим:

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2(\widehat{x,\ l})+\frac{\partial v_y}{\partial y}\cos^2(\widehat{y,\ l})+\frac{\partial v_z}{\partial z}\cos^2(\widehat{z,\ l})+2\varepsilon_z\cos(\widehat{x,l})\cos(\widehat{y,l})+$$
$$+2\varepsilon_x\cos(\widehat{y,\ l})\cos(\widehat{z,\ l})+2\varepsilon_y\cos(\widehat{x,\ l})\cos(\widehat{z,\ l}). \tag{4.26}$$

Скорость линейной деформации по направлению l мы получим, умножая $\partial v_l/\partial l$ на длину элемента Δl:

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}\Delta l=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x+\varepsilon_y\Delta z+\varepsilon_z\Delta y\right)\cos(\widehat{x,l})+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_z\Delta x+\varepsilon_x\Delta z\right)\cos(\widehat{y,l})+$$
$$+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_x\Delta y+\varepsilon_y\Delta x\right)\cos(\widehat{z,l}).$$

Отсюда видно, что скорость линейной деформации в любом направлении равна проекции на это направление вектора, компоненты которого по осям координат определяются выражениями (4.25).

Для того чтобы вычислить этот вектор, нужно знать, как видим, скорости линейной деформации по осям координат и скорости скашивания граней, т. е. всего шесть величин. Однако можно так выбрать оси координат, что для определения скорости чистой деформации в данной точке среды (или, что все равно, для определения $\partial v_l/\partial l$) достаточно будет знать всего три величины, именно скорости деформации вдоль осей координат. Мы докажем это, исходя из геометрической интерпретации уравнения (4.26). Для этого разделим обе части этого уравнения на $\partial v_l/\partial l$ и введем обозначения:

$$\frac{\cos(\widehat{x,l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}}=x_1,\quad \frac{\cos(\widehat{y,l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}}=y_1,$$
$$\frac{\cos(\widehat{z,l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}}=z_1.$$

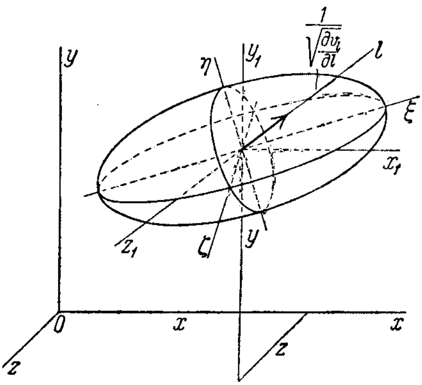

Рис. 4.19. Эллипсоид скоростей деформации.

Определенные по этим формулам x_1, y_1, z_1 можно изобразить геометрически, взяв систему координат с началом в точке M_0 и осями, параллельными соответственно осям x, y, z. Если условиться откладывать от точки M_0 по каждому направлению l, которое из нее выходит, вектор ρ, по абсолютной величине равный $1/\sqrt{\partial v_l/\partial l}$ (рис. 4.19), то тогда, очевидно, x_1, y_1, z_1 будут представлять собой координаты конца вектора ρ. На уравнение (4.26) можно при этом смотреть как на соотношение между координатами x_1, y_1 z_1, которому они должны удовлетворять при всевозможных направлениях l. Если ввести в уравнение (4.26) эти координаты, то оно примет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}x_1^2+\frac{\partial v_y}{\partial y}y_1^2+\frac{\partial v_z}{\partial z}z_1^2+2\varepsilon_z x_1y_1+2\varepsilon_x y_1z_1+2\varepsilon_y x_1z_1=1.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение некоторой поверхности второго порядка, которая и является геометрическим местом концов вектора ρ. Для того чтобы выяснить, какую именно из поверхностей второго порядка изображает это уравнение, мы ограничимся наиболее важным случаем, когда ни для одного из направлений, исходящих из точки M_0, коэффициент скорости линейной деформации $\partial v_l/\partial l$ не равен нулю. В этом случае координаты x_1, y_1, z_1 всех точек на рассматриваемой поверхности суть величины конечные. Следовательно, на этой поверхности нет бесконечно удаленных точек, а из всех поверхностей второго порядка этим свойством обладает, как известно, только эллипсоид. Таким образом, концы всех векторов ρ, отложенных из точки M_0, как из полюса, лежат на эллипсоиде. Мы будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом скоростей деформации* для точки M_0. Естественно упростить уравнение эллипсоида скоростей деформации, взяв за оси координат главные оси эллипсоида (главная система координат). Из математики известно, что при этом в уравнении эллипсоида будут отсутствовать слагаемые, содержащие произведения координат, и уравнение примет следующий, канонический вид:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\xi^2+\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\eta^2+\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}\zeta^2=1,$$

где ξ, η, ζ — новые координаты, оси которых повернуты относительно предыдущих так, что совпадают с главными осями эллипсоида. Эти оси называются иначе *главными направлениями деформации в точке* M_0. Они указывают, очевидно, направления максимальной и минимальной скоростей линейной деформации для точки M_0. В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{\partial v_\xi/\partial \xi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\partial v_\eta/\partial \eta}},\quad \frac{1}{\sqrt{\partial v_\zeta/\partial \zeta}}$$

являются полуосями эллипсоида, и одна из этих величин представляет собой максимальное для данной точки значение ρ, другая — минимальное; так как удельная скорость линейной деформации в данном направлении обратна по величине ρ^2, то в первом случае эта скорость будет минимальной, во втором — максимальной. Вследствие того, что для главных направлений деформации скорости скашивания равны нулю, эти направления обладают еще тем свойством, что элементы $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, отложенные из точки M_0 вдоль этих направлений, испытывают только линейную деформацию (растяжение или сжатие). Углы между этими элементами все время остаются прямыми. Следовательно, главная система координат в каждой точке жидкости во время движения вместе с точкой только вращается, но не скашивается. Вместе с тем главная система координат обладает тем свойством, что в этой системе наиболее просто вычисляются коэффициенты скорости линейной деформации по любому направлению l. Подставляя в каноническое уравнение эллипсоида скоростей деформации вместо ξ, η, ζ их выражения через направляющие косинусы направления l, именно:

$$\xi=\frac{\cos(\widehat{\xi, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},\quad \eta=\frac{\cos(\widehat{\eta, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},\quad \zeta=\frac{\cos(\widehat{\zeta, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},$$

получим следующую формулу для определения $\partial v_l/\partial l$:

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}=\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\cos^2(\widehat{\xi, l})+\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\cos^2(\widehat{\eta, l})+\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}\cos^2(\widehat{\zeta, l}),$$

которая содержит вместо шести слагаемых формулы (4.26) только три. Таким образом, в случае, когда известны направления главных осей, для определения скорости линейной деформации в любом направлении, исходящем из данной точки, необходимо знать лишь три величины, именно удельные скорости деформации по главным направлениям в данной точке.

§ 7. Движение без вращения частиц. Понятие о потенциале скоростей

Изучим теперь подробно один частный, но весьма важный случай движения жидкости, именно движение, происходящее без вращения частиц.

Важность этого случая определяется тем обстоятельством, что при движении удобообтекаемого тела вращение частиц практически