будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом скоростей деформации* для точки M_0. Естественно упростить уравнение эллипсоида скоростей деформации, взяв за оси координат главные оси эллипсоида (главная система координат). Из математики известно, что при этом в уравнении эллипсоида будут отсутствовать слагаемые, содержащие произведения координат, и уравнение примет следующий, канонический вид:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\xi^2+\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\eta^2+\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}\zeta^2=1,$$

где ξ, η, ζ — новые координаты, оси которых повернуты относительно предыдущих так, что совпадают с главными осями эллипсоида. Эти оси называются иначе *главными направлениями деформации в точке* M_0. Они указывают, очевидно, направления максимальной и минимальной скоростей линейной деформации для точки M_0. В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{\partial v_\xi/\partial \xi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\partial v_\eta/\partial \eta}},\quad \frac{1}{\sqrt{\partial v_\zeta/\partial \zeta}}$$

являются полуосями эллипсоида, и одна из этих величин представляет собой максимальное для данной точки значение ρ, другая — минимальное; так как удельная скорость линейной деформации в данном направлении обратна по величине ρ^2, то в первом случае эта скорость будет минимальной, во втором — максимальной. Вследствие того, что для главных направлений деформации скорости скашивания равны нулю, эти направления обладают еще тем свойством, что элементы $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, отложенные из точки M_0 вдоль этих направлений, испытывают только линейную деформацию (растяжение или сжатие). Углы между этими элементами все время остаются прямыми. Следовательно, главная система координат в каждой точке жидкости во время движения вместе с точкой только вращается, но не скашивается. Вместе с тем главная система координат обладает тем свойством, что в этой системе наиболее просто вычисляются коэффициенты скорости линейной деформации по любому направлению l. Подставляя в каноническое уравнение эллипсоида скоростей деформации вместо ξ, η, ζ их выражения через направляющие косинусы направления l, именно:

$$\xi=\frac{\cos(\widehat{\xi, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},\quad \eta=\frac{\cos(\widehat{\eta, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},\quad \zeta=\frac{\cos(\widehat{\zeta, l})}{\sqrt{\partial v_l/\partial l}},$$

получим следующую формулу для определения $\partial v_l/\partial l$:

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}=\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\cos^2(\widehat{\xi, l})+\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\cos^2(\widehat{\eta, l})+\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}\cos^2(\widehat{\zeta, l}),$$

которая содержит вместо шести слагаемых формулы (4.26) только три. Таким образом, в случае, когда известны направления главных осей, для определения скорости линейной деформации в любом направлении, исходящем из данной точки, необходимо знать лишь три величины, именно удельные скорости деформации по главным направлениям в данной точке.

§ 7. Движение без вращения частиц. Понятие о потенциале скоростей

Изучим теперь подробно один частный, но весьма важный случай движения жидкости, именно движение, происходящее без вращения частиц.

Важность этого случая определяется тем обстоятельством, что при движении удобообтекаемого тела вращение частиц практически отсутствует почти во всем потоке, за исключением областей, небольших по своей протяженности. Можно указать вполне конкретные места в потоке, обтекающем тело, где имеются резкие изменения величины скорости и где, следовательно, угловую скорость вращения частиц ω нельзя считать пренебрежимо малой.

Это, во-первых, область в потоке, непосредственно прилегающая к поверхности тела; она называется, как известно из предыдущей главы, пограничным слоем данного тела. Размеры этой области по нормали к поверхности тела (толщина пограничного слоя) обычно весьма малы по сравнению с продольным размером тела. Но на протяжении этой малой толщины слоя скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости, которая была бы в данном месте при обтекании тела идеальной жидкостью. Поэтому в пограничном слое все частицы вращаются и, изучая движение без вращения частиц, мы должны исключить из нашего рассмотрения область пограничного слоя.

Местом резких изменений скорости являются, во-вторых, области разрыва скоростей, которые образуются в сжимаемой среде при значениях числа M, бо́льших критического. Эти области называются, как известно из предыдущей главы, скачками уплотнения или ударными волнами и имеют ничтожно малую толщину. Изучая движение без вращения частиц, мы должны исключить из нашего рассмотрения и скачки уплотнения.

Местом резких изменений скорости является, в-третьих, спутная струя за телом. В этой области находятся частицы, попавшие сюда из пограничного слоя и продолжающие вращаться, здесь находятся и вихри, которые образовались в результате отрыва и свертывания пограничного слоя. Эту область мы также исключаем из нашего рассмотрения.

Таким образом, *для удобообтекаемых тел можно предположить, что вращения частиц в потоке отсутствуют практически на всем протяжении тела* (разумеется, вне перечисленных областей); для неудобообтекаемых тел такое предположение соответствует действительности лишь для передней части [1]).

Вот почему изучение движения жидкости без вращения частиц имеет особое значение в теории удобообтекаемых тел, т. е. таких тел, которые являются важнейшими для авиационной и ракетной техники. Многие вопросы аэродинамики летательного аппарата решаются в предположении, что обтекание происходит без вращения частиц. Сюда относятся, в частности, все вопросы, связанные с распределением давлений и аэродинамических нагрузок.

---

[1]) Заметим, что, как показывают наблюдения, можно и для неудобообтекаемых тел предполагать отсутствие вращений в потоке, но лишь *в начальный период движения*, до возникновения возвратного течения в кормовой части тела.

Если вращение частиц в потоке отсутствует, то это значит, что

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,$$

и тогда из формул (4.23) получается:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{4.27}$$

Последние равенства позволяют значительно упростить вычисление v_x, v_y, v_z. Вместо трех неизвестных величин, какими являются в кинематике жидкости v_x, v_y, v_z, оказывается возможным с помощью уравнений (4.27) свести задачу об определении поля скоростей к нахождению одной неизвестной функции.

Для того чтобы показать это, рассмотрим выражение

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz, \tag{4.28}$$

которое построено аналогично известному из механики выражению для элементарной работы (сумма произведений проекций вектора силы на проекции элементарного перемещения). Поставим вопрос о том, в каком случае выражение (4.28) является полным дифференциалом. Аналогичный вопрос, как известно, рассматривается в механике по отношению к элементарной работе, и в зависимости от того, является ли выражение для элементарной работы полным дифференциалом или не является, силы делятся на консервативные (или имеющие потенциал) и неконсервативные (или не имеющие потенциала). Для первых величина работы не зависит от формы пути, по которому происходит перемещение точки приложения силы (сюда относится, например, сила тяжести), для вторых — зависит (сюда относится, например, сила трения).

Как известно из математики, условием того, чтобы выражение типа (4.28) было полным дифференциалом некоторой функции, является равенство друг другу крест-накрест взятых частных производных от коэффициентов при дифференциалах независимых переменных. Это условие, очевидно, полностью совпадает с равенствами (4.27). Таким образом, можно сказать, что *если движение жидкости происходит без вращения частиц, то выражение* (4.28) *является полным дифференциалом некоторой функции координат*. Обозначим эту функцию через $\varphi(x, y, z, t)$[1]; тогда мы сможем записать наш вывод в виде равенства

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi.$$

Сопоставим теперь это выражение для $d\varphi$ с обычным выражением полного дифференциала через частные:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

[1]) Время t здесь входит лишь в качестве параметра.

Так как в обоих выражениях dx, dy, dz суть произвольные приращения координат, то из равенства выражений для $d\varphi$ вытекает равенство коэффициентов соответственно при dx, dy, dz:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4.29}$$

Таким образом, поле скоростей потока в случае, когда движение происходит без вращения частиц, обладает свойствами, аналогичными свойствам поля силы, имеющей потенциал. В том и в другом случаях интеграл от дифференциального выражения вида (4.28) не зависит от формы пути интегрирования, а лишь от координат начальной A и конечной B точек пути:

$$\int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A;$$

компоненты вектора выражаются в том и в другом случаях в виде производных по соответствующим координатам от одной и той же функции. Поэтому Гельмгольц предложил называть функцию $\varphi(x, y, z, t)$, которая здесь играет такую же роль, как потенциал силы в общей механике, *потенциалом скоростей*. Всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скоростей, и наоборот, если существует потенциал скоростей, то движение происходит без вращения частиц; поэтому такое движение называют обычно *потенциальным*.

Нетрудно видеть, что проекция вектора скорости на любое направление s равна производной от потенциала скоростей по этому же направлению. В самом деле,

$$v_s = v_x \cos(\widehat{s, x}) + v_y \cos(\widehat{s, y}) + v_z \cos(\widehat{s, z}).$$

Подставляя вместо v_x, v_y, v_z их выражения через потенциал скоростей по формулам (4.29), а вместо направляющих косинусов направления s соответственно dx/ds, dy/ds, dz/ds, получим:

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

По теореме о дифференцировании функции от функции правая часть равна $\partial\varphi/\partial s$, и таким образом, для любого направления s

$$v \cos(\widehat{v, s}) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \tag{4.30}$$

Последнее равенство наиболее полно определяет взаимоотношения между потенциальной функцией φ и вектором скорости $\boldsymbol{v}$. Из математики известно, что частная производная $\partial\varphi/\partial s$ (ее называют также производной по направлению) представляет собой быстроту изменения функции φ вдоль направления s. Как видно из последней формулы, быстроту изменения функции φ в любом направлении можно получить, проектируя на это направление вектор $\boldsymbol{v}$. Множество производных по направлениям, исходящим из данной точки, можно, следовательно, заменить одним вектором $\boldsymbol{v}$. По отношению к функции φ, являющейся функцией многих переменных, он играет ту же роль, что обыкновенная производная по отношению к функции одной переменной. Этот вектор полностью характеризует быстроту изменения функции φ в данной точке. Направление этого вектора совпадает с направлением быстрейшего роста функции φ. В самом деле, когда направление s совпадает с направлением $\boldsymbol{v}$, $\cos(\widehat{v, s}) = 1$ и $\partial\varphi/\partial s$ получает максимальное значение, равное величине вектора $\boldsymbol{v}$. Такой *вектор*, направление которого в каждой данной точке совпадает с направлением быстрейшего возрастания функции φ и проекция которого на любое направление равна производной от φ по этому направлению, называется *градиентом функции* φ и обозначается через $\operatorname{grad}\varphi$:

$$|\operatorname{grad}\varphi| \cdot \cos(\widehat{\operatorname{grad}\varphi, s}) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

По абсолютной величине этот вектор, очевидно, равен

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Итак, в случае, когда движение происходит без вращения частиц, поле скоростей можно рассматривать как поле градиента некоторой функции φ:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Это обстоятельство значительно упрощает определение поля скоростей потенциального потока. Если в общем случае (т. е. когда имеется вращение частиц в потоке) определение поля скоростей приводилось к определению трех неизвестных функций координат и времени

$$v_x = f_1(x, y, z; t), \qquad v_y = f_2(x, y, z; t), \qquad v_z = f_3(x, y, z; t),$$

то в частном случае, когда поток потенциальный, определение поля скоростей сводится к определению одной неизвестной функции, именно потенциала скоростей φ. Достаточно определить эту единственную неизвестную функцию φ, и компоненты скорости без всякого затруднения определяются по формулам (4.27) или по эквивалентной формуле (4.30). Таким образом, потенциальный поток является наиболее простым не только с механической точки зрения, но и с точки зрения расчетной.

Рассмотрим некоторые основные свойства потенциала скоростей.

Функцию φ можно геометрически представить в виде семейства поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Такие поверхности, во всех точках которых потенциал сохраняет постоянное для каждой поверхности значение, называются *поверхностями равного потенциала.*

Для того чтобы наглядно представить себе эти поверхности, докажем следующее свойство их. Вектор скорости в каждой точке направлен по нормали к проходящей через эту точку поверхности равного потенциала. Пусть s будет направление касательной в данной точке к поверхности $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Тогда для каждого такого направления $\partial\varphi/\partial s = 0$, и, следовательно, по формуле (4.30)

$$\cos(\widehat{v, s}) = 0.$$

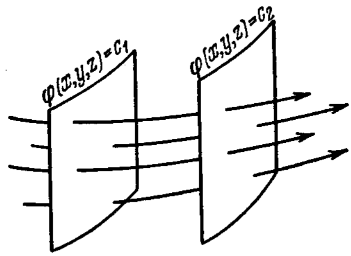

Рис. 4.20. Линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала.

Это означает, что вектор скорости направлен по перпендикуляру ко всем направлениям, касательным к поверхности равного потенциала в данной точке, т. е. что он направлен по нормали к этой поверхности. Таким образом, *линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала* (рис. 4.20)[1]).

§ 8. Движение по концентрическим окружностям без вращения частиц (плоский вихрь)

Рассмотрим в качестве примера движения без вращения частиц установившееся движение жидкости по концентрическим окружностям вокруг бесконечно длинной прямолинейной оси. Предположим, что во всех плоскостях, перпендикулярных к этой оси, течение является одинаковым, т. е. представляет собой плоское движение. Такое движение жидкости будем называть *плоским вихрем* (или вихрем на плоскости), а ось, вокруг которой движутся частицы, — осью вихря. Найдем из условия $\omega = 0$ распределение скоростей в поле плоского вихря.

Расположим систему координат так, чтобы плоскость xy была перпендикулярна к оси вихря, а ось z была направлена вдоль оси вихря. Введем в плоскости xy полярную систему координат r, θ и выделим элемент жидкости, ограниченный двумя соседними концентрическими окружностями и двумя соседними лучами, исходящими из начала координат (рис. 4.21). Найдем угловые скорости вращения отрезков M_0M_1 и M_0M_2. Относительная скорость точки M_1 по отно-

[1]) Исключением являются при этом точки, в которых скорость равна нулю (критические точки нулевой скорости). Изложенное в тексте доказательство ортогональности линий тока и поверхностей равного потенциала к таким точкам неприменимо.