

Такие поверхности, во всех точках которых потенциал сохраняет постоянное для каждой поверхности значение, называются *поверхностями равного потенциала*.

Для того чтобы наглядно представить себе эти поверхности, докажем следующее свойство их. Вектор скорости в каждой точке направлен по нормали к проходящей через эту точку поверхности равного потенциала. Пусть s будет направление касательной в данной точке к поверхности $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Тогда для каждого такого направления $d\varphi/ds = 0$, и, следовательно, по формуле (4.30)

$$\cos(\hat{v}, s) = 0.$$

Это означает, что вектор скорости направлен по перпендикуляру ко всем направлениям, касательным к поверхности равного потенциала в данной точке, т. е. что он направлен по нормали к этой поверхности. Таким образом, *линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала* (рис. 4.20)¹.

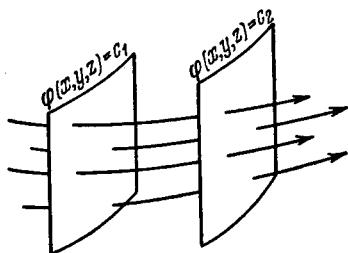


Рис. 4.20. Линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала.

§ 8. Движение по concentрическим окружностям без вращения частиц (плоский вихрь)

Рассмотрим в качестве примера движения без вращения частиц установившееся движение жидкости по concentрическим окружностям вокруг бесконечно длинной прямолинейной оси. Предположим, что во всех плоскостях, перпендикулярных к этой оси, течение является одинаковым, т. е. представляет собой плоское движение. Такое движение жидкости будем называть *плоским вихрем* (или вихрем на плоскости), а ось, вокруг которой движутся частицы, — осью вихря. Найдем из условия $\omega = 0$ распределение скоростей в поле плоского вихря.

Расположим систему координат так, чтобы плоскость xu была перпендикулярна к оси вихря, а ось z была направлена вдоль оси вихря. Введем в плоскости xu полярную систему координат r, θ и выделим элемент жидкости, ограниченный двумя соседними concentрическими окружностями и двумя соседними лучами, исходящими из начала координат (рис. 4.21). Найдем угловые скорости вращения отрезков M_0M_1 и M_0M_2 . Относительная скорость точки M_1 по отно-

¹ Исключением являются при этом точки, в которых скорость равна нулю (критические точки нулевой скорости). Изложенное в тексте доказательство ортогональности линий тока и поверхностей равного потенциала к таким точкам неприменимо.

шению к точке M_0 равна разности между абсолютной скоростью M_1 и переносной вместе с точкой M_0 . Переносная скорость точки M_1 вдоль перпендикуляра к радиусу равна $v_s(r + \Delta r)/r$, и следовательно, для относительной скорости в этом направлении получается выражение

$$v_s + \Delta v_s - v_s \frac{r + \Delta r}{r} = \Delta v_s - v_s \frac{\Delta r}{r}.$$

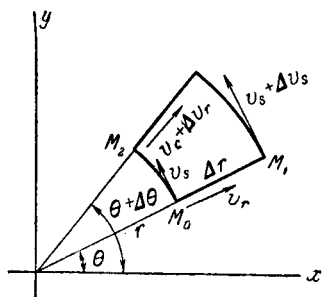
Деля на Δr и переходя к пределу при $\Delta r \rightarrow 0$, находим, что угловая скорость вращения ребра M_0M_1 вокруг точки M_0 равна $\partial v_s / \partial r - v_s / r$. Угловая скорость вращения ребра M_0M_2 вокруг точки M_0 равна $-\partial v_r / \partial s = -(1/r) \cdot \partial v_r / \partial \theta$. Беря среднее арифметическое угловых скоростей ребер M_0M_1 и M_0M_2 , получаем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{v_s}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right).$$

Кроме этой угловой скорости, частица жидкости $M_0M_1M_2$ имеет, в связи с наличием скорости v_s , угловую скорость вокруг оси z , равную v_s/r . Таким образом, полная угловая скорость частицы в проекции на ось z равна

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_s}{\partial r} + \frac{v_s}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right). \quad (4.31)$$

Рис. 4.21. К выводу формулы для ω_z в полярной системе координат.



Так как в плоском вихре движение происходит, по определению, без вращения частиц, то $\omega_z = 0$, и так как, кроме того, $v_r = 0$, то для v_s получается уравнение

$$\frac{dv_s}{dr} = -\frac{v_s}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{dv_s}{v_s} = -\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\ln v_s = -\ln r + \ln C_1,$$

откуда

$$v_s = v = \frac{C_1}{r},$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Итак, скорость в поле плоского вихря убывает при удалении от оси вихря обратно пропорционально расстоянию до оси. Коэффициент пропорциональности C_1 в последней формуле целесообразно представить в виде $\Gamma/2\pi$, где Γ также есть константа для данного потока; тогда мы сможем написать:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (4.32)$$

или в проекциях на оси x и y :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -v \cos \theta = -v \frac{x}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ v_y &= v \sin \theta = v \frac{y}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Величина $\Gamma = v \cdot 2\pi r$ имеет простой механический смысл: она представляет собою произведение скорости частицы на пройденный ею путь и, следовательно, аналогична работе силы. Мы будем называть Γ *циркуляцией скорости* вокруг данного вихря.

Результат, выраженный последними формулами, является весьма замечательным, так как указывает на существенное различие между вращением твердого тела и вихрем в жидкости. Вращение твердого тела вокруг оси, так же как и вихрь в жидкости, характеризуется круговыми траекториями частиц. Но в случае твердого тела скорость в данной точке возрастает при удалении точки от оси вращения пропорционально радиусу, в случае же вихря скорость убывает обратно пропорционально радиусу; графически эта зависимость изображается равнобочной гиперболой (рис. 4.22), а не прямой линией, как в случае вращения твердого тела. Различие в распределении скоростей является следствием малости сил сцепления в жидкостях и газах, что приводит к скольжению частиц.

Рассмотренный случай движения показывает, что круговые линии тока, которые имеют место при плоском вихре, вовсе не свидетельствуют о вращении частиц. Можно доказать, что частицы в поле вихря движутся поступательно по окружностям. Точнее говоря, движутся поступательно по окружностям биссектрисы углов при начальных точках частиц, а частицы во время движения лишь деформируются так, как изображено на рис. 4.23.

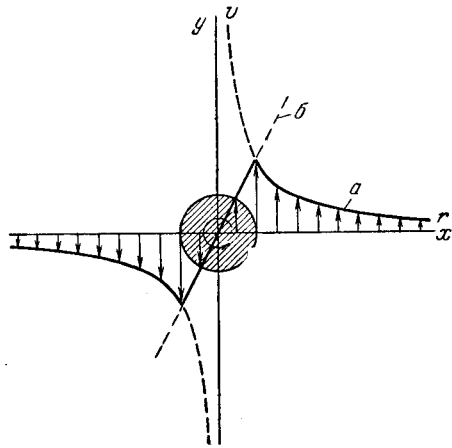


Рис. 4.22. Вихрь на плоскости. Распределение скоростей в поле вихря (равнобочная гипербола a) и во вращающемся твердом теле (прямая b).

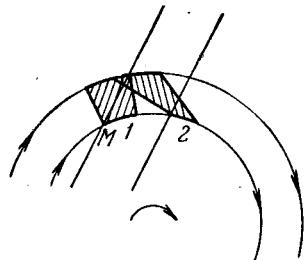


Рис. 4.23. Движение частицы в поле вихря. Частица при перемещении из 1 в 2 деформируется так, что биссектриса угла при точке M не изменяет направления. Вращение частицы при этом отсутствует.

Формулы (4.32) и (4.33) не пригодны для точки, находящейся на оси вихря, так как в этой точке по формулам получается бесконечно большая скорость. Эта точка является особой точкой потока. Наблюдения показывают, что в действительных вихрях частицы жидкости, находящиеся на оси вихря и вблизи нее, вращаются с приблизительно одинаковой угловой скоростью. Эта часть жидкости называется *ядром вихря*; ее поперечные размеры зависят от угловой скорости вращения и вязкости среды. Если считать, что в ядре вихря $\omega_z = \text{const} = \omega$ и линии тока остаются по-прежнему круговыми, то из формулы (4.31) получается, в чем предоставляем убедиться читателю, что $v = \omega r$. Иными словами, ядро вихря вращается по законам вращения твердого тела. Действительное распределение скоростей в плоском вихре изобразится поэтому отрезком прямой линии для ядра и отрезками равнобочной гиперболы для пространства, внешнего к ядру (сплошная линия на рис. 4.22). Как видно из предыдущих рассуждений, распределение скоростей вне ядра одинаково как для сжимаемой среды, так и для несжимаемой, ибо получено из чисто кинематических условий $\omega = 0$ и $v_r = 0$.

§ 9. Уравнения для потенциала скоростей и функции тока потока несжимаемой жидкости

Компоненты скорости потока в каждой данной точке удовлетворяют, как известно из гл. II, уравнению неразрывности движения. Это уравнение является основным и для определения потенциала скоростей.

В простейшем случае, когда жидкость несжимаема, уравнение неразрывности движения имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в него вместо компонент скорости их выражения через потенциальную функцию φ (по формулам (4.29)), получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.34)$$

Это последнее уравнение известно под названием уравнения Лапласа; функции, которые ему удовлетворяют, называются гармоническими. Таким образом, потенциал скоростей в случае несжимаемой жидкости есть гармоническая функция.

Заметим, что в случае потенциального потока несжимаемой жидкости каждая компонента скорости удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, является гармонической функцией. В самом деле, дифференцируя уравнение (4.34) поочередно по x , y , z , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$