Формулы (4.32) и (4.33) не пригодны для точки, находящейся на оси вихря, так как в этой точке по формулам получается бесконечно большая скорость. Эта точка является особой точкой потока. Наблюдения показывают, что в действительных вихрях частицы жидкости, находящиеся на оси вихря и вблизи нее, вращаются с приблизительно одинаковой угловой скоростью. Эта часть жидкости называется *ядром вихря;* ее поперечные размеры зависят от угловой скорости вращения и вязкости среды. Если считать, что в ядре вихря $\omega_z = \text{const} = \omega$ и линии тока остаются по-прежнему круговыми, то из формулы (4.31) получается, в чем предоставляем убедиться читателю, что $v = \omega r$. Иными словами, ядро вихря вращается по законам вращения твердого тела. Действительное распределение скоростей в плоском вихре изобразится поэтому отрезком прямой линии для ядра и отрезками равнобочной гиперболы для пространства, внешнего к ядру (сплошная линия на рис. 4.22). Как видно из предыдущих рассуждений, распределение скоростей вне ядра одинаково как для сжимаемой среды, так и для несжимаемой, ибо получено из чисто кинематических условий $\omega = 0$ и $v_r = 0$.

## § 9. Уравнения для потенциала скоростей и функции тока потока несжимаемой жидкости

Компоненты скорости потока в каждой данной точке удовлетворяют, как известно из гл. II, уравнению неразрывности движения. Это уравнение является основным и для определения потенциала скоростей.

В простейшем случае, когда жидкость несжимаема, уравнение неразрывности движения имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в него вместо компонент скорости их выражения через потенциальную функцию $\varphi$ (по формулам (4.29)), получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (4.34)$$

Это последнее уравнение известно под названием уравнения Лапласа; функции, которые ему удовлетворяют, называются гармоническими. Таким образом, потенциал скоростей в случае несжимаемой жидкости есть гармоническая функция.

Заметим, что в случае потенциального потока несжимаемой жидкости каждая компонента скорости удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, является гармонической функцией. В самом деле, дифференцируя уравнение (4.34) поочередно по $x$, $y$, $z$, получим:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0.$$

Выше было отмечено, что потенциальная функция $\varphi$ полностью определяет кинематику потока в случае, когда отсутствует вращение частиц. Она является в этом случае единственной неизвестной функцией вместо трех неизвестных в общем случае. Для того чтобы найти эту неизвестную, нужно решить уравнение (4.34). Однако само по себе это уравнение недостаточно для определения функции $\varphi$ в каждом конкретном случае. Это уравнение есть дифференциальное уравнение в частных производных; оно имеет бесчисленное множество решений. Поэтому должны быть даны дополнительные условия (кроме уравнения) для определения функции $\varphi$ в каждом конкретном случае. Рассмотрим, в чем должны заключаться эти условия, например, для обтекания потоком идеальной жидкости *неподвижного* тела. Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь так называемое безотрывное обтекание тела, т. е. такое обтекание, при котором между жидкостью и поверхностью тела не образуется пустот (разрывов). При этом условии скорость потока на поверхности тела $S$ должна быть направлена по касательной к поверхности.

Следует иметь в виду, что в идеальной жидкости скорость на поверхности обтекаемого тела, вообще говоря, не равна нулю, так как частицы могут скользить вдоль поверхности. Нормальная же к поверхности тела составляющая скорости должна быть равна нулю, так как частица жидкости не может ни проникнуть внутрь тела, ни оторваться от его поверхности (ибо обтекание неотрывное). В этом заключается первое из дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция $\varphi$; запишем это условие:

$$[v_n]_S = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_S = 0. \tag{4.35}$$

Оно называется *условием скольжения для идеальной жидкости*. Здесь значок $S$ указывает на то, что равенство (4.35) относится к значениям $v_n$ и нормальной производной от $\varphi$ лишь в точках, находящихся на поверхности тела.

Второе условие относится к другой границе потока: на весьма далеком расстоянии от тела, где возмущающее влияние тела на поток отсутствует (условно говоря, на бесконечности), поток должен иметь заданную скорость $V$:

$$\boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{V}. \tag{4.36}$$

Эта скорость $\boldsymbol{V}$ равна по абсолютной величине скорости тела при необращенном движении его в среде и направлена противоположно по отношению к ней.

Оба дополнительных условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi$, относятся к значениям этой функции на границах жидкости и поэтому называются обычно *граничными условиями* данной задачи. Таким образом, при решении уравнения Лапласа для данной конкретной задачи следует выбрать из всех функций $\varphi$, удовлетворяющих ему, именно ту, которая удовлетворяет и граничным условиям (4.35) и (4.36). Можно доказать, что эти условия, будучи присоединены к уравнению Лапласа, уже вполне определяют функцию $\varphi$.

Остановимся теперь на частных случаях, когда поток несжимаемой жидкости плоский и симметрично-осевой. Для этих случаев существует функция тока, которая, так же как и потенциальная функция, полностью определяет поле скоростей. Отсутствие вращения частиц дает при этом дополнительное условие, которое оказывается достаточным для определения функции тока.

Рассмотрим сначала случай плоского потока, параллельного плоскости $xy$. Составляющие скорости выражаются в этом случае через функцию тока по формулам (4.14):

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Если в потоке отсутствует вращение частиц, то

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Подставляя сюда вместо $v_x$ и $v_y$ их выражения через $\psi$, получаем следующее уравнение для определения функции тока плоского потока:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{4.37}$$

Таким образом, функция тока в плоском потенциальном потоке должна быть решением уравнения Лапласа, т. е. должна быть гармонической функцией, так же, как и потенциал скоростей $\varphi$, который удовлетворяет в этом случае уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Кроме того, функция тока должна удовлетворять граничным условиям. Одно из этих условий есть условие неотрывного обтекания контура тела, находящегося в потоке. Этот контур $L$ должен быть одной из линий тока, ибо во всех его точках скорость направлена по касательной к нему. Следовательно, функция тока во всех точках контура $L$ должна сохранять постоянное значение:

$$[\psi(x, y)]_L = \text{const}. \tag{4.38}$$

Второе граничное условие для функции тока есть условие на бесконечности (4.36).

В случае симметрично-осевого потока для функции тока получается несколько более сложное уравнение, нежели уравнение Лапласа. Нетрудно показать, что в цилиндрической системе координат составляющая угловой скорости $\omega_s$, перпендикулярная к плоскости $(x, r)$, определяется аналогично $\omega_z$ в формулах (4.23):

$$\omega_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r}\right).$$

Если вращение частиц в потоке отсутствует, то

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0.$$

Подставим сюда вместо компонент скорости их выражения через функцию тока по формулам (4.21):

$$v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

и уравнение для функции тока примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{4.39}$$

Граничные условия здесь формулируются так же, как и для случая плоского потока.

Потенциал скоростей в случае симметрично-осевого потока удовлетворяет аналогичному уравнению. Подставляя в уравнение неразрывности движения в цилиндрической системе координат (уравнение (2.16)) вместо компонент скорости их выражения через потенциальную функцию $\varphi$ и принимая во внимание, что в симметрично-осевом потоке $v_\theta = 0$, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \tag{4.40}$$

Задача кинематики потенциального потока несжимаемой жидкости с математической точки зрения сводится, таким образом, к решению уравнения Лапласа или уравнений (4.39) или (4.40) при определенных граничных условиях. Однако эта задача представляет значительные математические трудности. Основная трудность заключается здесь не в составлении общего интеграла, а в определении такого частного решения, которое удовлетворяло бы граничным условиям данной задачи.

В общем случае, т. е. для тела любой формы, помещенного в поток, эта задача не решена точно и до настоящего времени. Поэтому особый интерес и значение представляют те немногочисленные простейшие случаи потенциального потока, для которых можно точно определить потенциал скоростей и функцию тока, исходя из известного распределения скоростей, т. е. не решая уравнения Лапласа или уравнений (4.39) или (4.40). Сюда относятся уже рассмотренные ранее поступательный поток, источник и сток, вихрь на плоскости. Зная потенциалы скоростей этих простейших потоков, можно затем, комбинируя их между собой так, как это будет показано в дальнейшем, получать более сложные потоки. Оказывается, что при надлежащей комбинации перечисленных простейших потоков можно, вообще говоря, получить потенциальный поток, обтекающий любое данное тело.

## § 10. Примеры: потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков несжимаемой жидкости

**1. Прямолинейно-поступательный поток.** Расположим систему координат таким образом, чтобы ось $x$ была направлена по вектору скорости этого потока; величину скорости обозначим через $V$; тогда

$$v_x = V, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Из второго и третьего соотношений (4.29) видно, что в данном случае потенциал скоростей не зависит от $y$ и $z$; поэтому в первом соотношении (4.29) можно писать вместо частной обыкновенную производную. Оно примет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = V.$$

Интегрируя, получим:

$$\varphi = Vx. \tag{4.41}$$

Произвольную постоянную, которая получается при интегрировании, обычно в формулах для потенциала скоростей не пишут, так как функция $\varphi$ интересна лишь своими производными, на величину которых эта постоянная не оказывает влияния.

Поверхности равного потенциала представляют собой в данном случае плоскости, перпендикулярные к оси $x$.

**2. Источник (или сток) на плоскости.** Распределение скоростей в этом потоке определяется формулой

$$v = \frac{Q}{2\pi r},$$

где $r$ есть расстояние от точки в потоке до центра источника (стока), а $Q$ — расход жидкости единицы длины источника.

В полярной системе координат, применительно к которой написана последняя формула, компоненты скорости $v$ вдоль радиуса-вектора $v_r$ и перпендикулярно к радиусу-вектору $v_s$ выражаются через потенциал скоростей в виде производных по соответствующим направлениям:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

В данном случае $v_s = 0$ и $v$ совпадает с $v_r$. Следовательно, $\varphi$ не зависит от дуги $s$, а значит, и от полярного угла $\theta$. Поэтому в выражении для $v_r$ можно вместо частных производных писать обыкновенные, и тогда для определения $\varphi$ получается следующее равенство:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r}\, dr.$$