распределения скоростей, т. е. не решая уравнения Лапласа или уравнений (4.39) или (4.40). Сюда относятся уже рассмотренные ранее поступательный поток, источник и сток, вихрь на плоскости. Зная потенциалы скоростей этих простейших потоков, можно затем, комбинируя их между собой так, как это будет показано в дальнейшем, получать более сложные потоки. Оказывается, что при надлежащей комбинации перечисленных простейших потоков можно, вообще говоря, получить потенциальный поток, обтекающий любое данное тело.

§ 10. Примеры: потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков несжимаемой жидкости

1. Прямолинейно-поступательный поток. Расположим систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена по вектору скорости этого потока; величину скорости обозначим через V; тогда

$$v_x = V, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Из второго и третьего соотношений (4.29) видно, что в данном случае потенциал скоростей не зависит от y и z; поэтому в первом соотношении (4.29) можно писать вместо частной обыкновенную производную. Оно примет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = V.$$

Интегрируя, получим:

$$\varphi = Vx. \tag{4.41}$$

Произвольную постоянную, которая получается при интегрировании, обычно в формулах для потенциала скоростей не пишут, так как функция φ интересна лишь своими производными, на величину которых эта постоянная не оказывает влияния.

Поверхности равного потенциала представляют собой в данном случае плоскости, перпендикулярные к оси x.

2. Источник (или сток) на плоскости. Распределение скоростей в этом потоке определяется формулой

$$v = \frac{Q}{2\pi r},$$

где r есть расстояние от точки в потоке до центра источника (стока), а Q — расход жидкости единицы длины источника.

В полярной системе координат, применительно к которой написана последняя формула, компоненты скорости v вдоль радиуса-вектора v_r и перпендикулярно к радиусу-вектору v_s выражаются через потенциал скоростей в виде производных по соответствующим направлениям:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

В данном случае $v_s = 0$ и v совпадает с v_r. Следовательно, φ не зависит от дуги s, а значит, и от полярного угла θ. Поэтому в выражении для v_r можно вместо частных производных писать обыкновенные, и тогда для определения φ получается следующее равенство:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r}\,dr.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r. \tag{4.42}$$

Этот потенциал называется логарифмическим.

Поверхности равного потенциала в данном случае определяются равенством $\ln r=\mathrm{const}$, которое эквивалентно $r=\mathrm{const}$. Это будет, следовательно, семейство коаксиальных круговых цилиндров, ось которых совпадает с осью источника.

3. Источник (или сток) в пространстве. Поле скоростей в этом потоке определяется формулой (4.7)

$$v=\frac{Q}{4\pi\rho^2},$$

где ρ есть расстояние от точки в потоке до центра источника (или стока), а Q — расход жидкости.

Так как компоненты скорости по направлениям, перпендикулярным к радиусу-вектору ρ, равны в данном случае нулю, то равны нулю и производные по этим направлениям от потенциала скоростей. Потенциал скоростей зависит здесь только от ρ. Для определения этого потенциала получаем, таким образом, равенство

$$d\varphi=\frac{Q}{4\pi\rho^2}\,d\rho.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\varphi=-\frac{Q}{4\pi\rho}. \tag{4.43}$$

Поверхности равного потенциала здесь определяются равенством $Q/4\pi\rho=\mathrm{const}$, которое эквивалентно $\rho=\mathrm{const}$. Это, следовательно, семейство концентрических сфер с центром в центре источника.

4. Вихрь на плоскости. В поле вихря (вне его ядра) частицы, как мы знаем, не вращаются. Следовательно, в этой области поток является потенциальным. Вычислим для него потенциал скоростей. Распределение скоростей в поле вихря определяется формулой (4.32)

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi r},$$

где r есть расстояние от оси вихря, Γ — постоянная, характеризующая его интенсивность. Вектор скорости в каждой точке направлен в данном случае перпендикулярно к радиусу-вектору точки: $v_r=0$, $v_s=v$. Вследствие первого из этих равенств потенциал скоростей не зависит от радиуса-вектора. Для определения потенциала получаем, таким образом, следующее уравнение:

$$d\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi r}\,ds.$$

Подставляя вместо ds произведение $r\,d\theta$ и интегрируя, получим:

$$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \tag{4.44}$$

где θ — полярный угол точки, находящейся в поле вихря. Поверхности равного потенциала определяются в данном случае равенством $(\Gamma/2\pi)\theta=\mathrm{const}$, откуда следует $\theta=\mathrm{const}$. Это — семейство плоскостей, проходящих через ось вихря.

На каждом из приведенных примеров можно убедиться, что в соответствии с общей теорией линии тока пересекают соответствующие поверхности равного потенциала под прямыми углами.

В дальнейшем нам придется часто пользоваться формулами для потенциала скоростей и функций тока рассмотренных здесь простейших потоков. Поэтому мы приводим здесь таблицу, в которой собраны выражения для потенциалов скоростей и функций тока всех этих потоков. Выражение для функции тока вихря на плоскости предоставляем вывести читателю; мы даем здесь его без вывода.

Таблица 4

Потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков

	Потенциал скоростей	Функция тока
а) Плоский поток		
1. Поступательный поток (направленный вдоль оси x)	Vx	Vy
2. Источник (или сток) на плоскости (с центром в начале координат)	$\frac{Q}{2\pi}\ln r$	$\frac{Q}{2\pi}\theta$
3. Вихрь на плоскости (с осью, проходящей через начало координат и с направлением движения против часовой стрелки)	$\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$
(здесь $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$)		
б) Симметрично-осевой поток		
1. Поступательный поток (направленный вдоль оси x)	Vx	$\frac{Vr^2}{2}$
2. Источник (или сток) в пространстве (с центром в начале координат)	$-\frac{Q}{4\pi\rho}$	$-\frac{Q}{4\pi}\cos\vartheta$
(здесь $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vartheta=\arcsin\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$).		

§ 11. Метод наложения потенциальных потоков несжимаемой жидкости

Уравнения, которым для несжимаемой жидкости удовлетворяет потенциал скоростей и функция тока при движении без вращения частиц, являются уравнениями в частных производных, и непосредственное определение из этих уравнений неизвестных φ или ψ, удовлетворяющих граничным условиям, представляет собой задачу в общем виде весьма трудную.

Однако некоторые частные решения этих уравнений нам уже известны; мы имеем в виду потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков, приведенные в таблице 4. Этих немногих решений достаточно для того, чтобы получить бесчисленное множество