В дальнейшем нам придется часто пользоваться формулами для потенциала скоростей и функций тока рассмотренных здесь простейших потоков. Поэтому мы приводим здесь таблицу, в которой собраны выражения для потенциалов скоростей и функций тока всех этих потоков. Выражение для функции тока вихря на плоскости предоставляем вывести читателю; мы даем здесь его без вывода.

Таблица 4

Потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков

	Потенциал скоростей	Функция тока
а) Плоский поток		
1. Поступательный поток (направленный вдоль оси x)	Vx	Vy
2. Источник (или сток) на плоскости (с центром в начале координат)	$\frac{Q}{2\pi}\ln r$	$\frac{Q}{2\pi}\theta$
3. Вихрь на плоскости (с осью, проходящей через начало координат и с направлением движения против часовой стрелки)	$\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$
$\left(\text{здесь } r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$		
б) Симметрично-осевой поток		
1. Поступательный поток (направленный вдоль оси x)	Vx	$\frac{Vr^2}{2}$
2. Источник (или сток) в пространстве (с центром в начале координат)	$-\frac{Q}{4\pi\rho}$	$-\frac{Q}{4\pi}\cos\vartheta$
$\left(\text{здесь } \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \vartheta=\arcsin\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}\right)$.		

§ 11. Метод наложения потенциальных потоков несжимаемой жидкости

Уравнения, которым для несжимаемой жидкости удовлетворяет потенциал скоростей и функция тока при движении без вращения частиц, являются уравнениями в частных производных, и непосредственное определение из этих уравнений неизвестных φ или ψ, удовлетворяющих граничным условиям, представляет собой задачу в общем виде весьма трудную.

Однако некоторые частные решения этих уравнений нам уже известны; мы имеем в виду потенциалы скоростей и функции тока простейших потоков, приведенные в таблице 4. Этих немногих решений достаточно для того, чтобы получить бесчисленное множество решений, в том числе и таких, которые соответствуют обтеканию того или иного тела. Дело в том, что все упомянутые уравнения (4.34), (4.37), (4.39) и (4.40) суть *уравнения линейные* и, следовательно, обладают тем свойством, что *сумма любого числа частных решений их также является решением.* Это нетрудно доказать непосредственной проверкой. Пусть, например, φ_1 и φ_2 представляют собой частные решения уравнения Лапласа (4.34). Тогда $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ также есть решение этого уравнения. В самом деле,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right).$$

Но φ_1 и φ_2 суть решения уравнения Лапласа, следовательно, каждая из этих функций, будучи подставлена в левую часть уравнения Лапласа, обращает его в нуль; тогда, как видно из последнего равенства, обращается в нуль и трехчлен

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Функция $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ есть, следовательно, также решение уравнения Лапласа. То, что здесь доказано для суммы двух частных решений, можно, очевидно, обобщить на случай суммы любого конечного числа частных решений.

Так как уравнения для функции тока также линейные, то и они обладают этим свойством.

Таким образом, *сумма потенциалов скоростей потоков несжимаемой жидкости всегда представляет собой также потенциал скоростей некоторого потока несжимаемой жидкости, а сумма функций тока всегда представляет собой также функцию тока.*

Можно значительно расширить круг известных нам решений уравнений для потенциала скоростей и функции тока, если воспользоваться этим свойством. Это свойство дает возможность получать все более сложные потенциалы скоростей и функции тока суммированием известных нам простейших частных решений. При надлежащем же подборе складываемых решений можно, как увидим на конкретных примерах, получить решение, соответствующее обтеканию того или иного тела.

Нетрудно видеть, что при сложении потенциалов скоростей или функций тока соответствующие им скоростные поля складываются друг с другом по общему правилу сложения векторных полей. Иными словами, у потока, который соответствует суммарному потенциалу или функции тока, скорость в каждой точке равна геометрической сумме скоростей складываемых потоков. В самом деле, пусть φ_1 и φ_2 будут потенциалы скоростей двух потоков, а $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ — соответствующие скорости. Вычислим скорость $\boldsymbol{v}$ потока, потенциал которого есть

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2.$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{v}$ определятся дифференцированием последнего равенства по соответствующим координатам и, так как производная суммы равна сумме производных, то

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = v_{x1} + v_{x2},$$
$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = v_{y1} + v_{y2},$$
$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = v_{z1} + v_{z2},$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

Поэтому в дальнейшем будем называть эту операцию (сложение φ или ψ) наложением потоков [1]).

Последнее равенство позволяет дать очень простой способ *графического определения линий тока результирующего потока,* если известны линии тока налагаемых потоков. Этот способ особенно удобен для случаев двумерного (в частности, плоского или симметрично-осевого) потока.

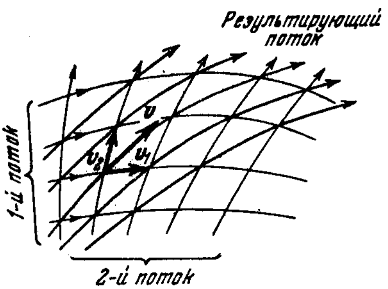

Рис. 4.24. Графический способ построения линий тока результирующего потока.

Рассмотрим сначала случай плоского потока. Представим себе, что на чертеж нанесены линии тока двух каких-либо плоских потоков (рис. 4.24). Своим пересечением они образуют своего рода сетку. Если линии тока каждого из этих потоков вычерчены таким образом, что стороны клеток в сетке линий тока изображают в определенном масштабе соответственные векторы скорости налагаемых потоков в данной точке, то вектор скорости результирующего потока в той же точке изобразится (приближенно) диагональю клетки (какой именно диагональю, можно установить по направлениям векторов скорости налагаемых потоков). Отсюда следует, что для построения линий

---

[1]) Заметим, что сложение скоростных полей применимо к любым (даже непотенциальным) потокам несжимаемой жидкости. Действительно, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

есть линейное уравнение; поэтому результат сложения скоростных полей любых потоков несжимаемой жидкости удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, представляет собой также некоторый поток несжимаемой жидкости.

тока результирующего потока достаточно в этом случае соединить между собой последовательные точки пересечения линий тока налагаемых потоков так, как это показано на рис. 4.24.

Выясним, каким условиям должен удовлетворять чертеж линий тока налагаемых потоков для того, чтобы стороны клеток изображали в определенном масштабе (одном и том же для всего чертежа) соответствующие векторы скоростей. Если обозначим длины сторон какой-либо клетки соответственно через Δs_1, Δs_2 (рис. 4.25), то упомянутое условие равенства масштабов изображения для векторов скорости обоих потоков запишется в виде пропорции:

$$\frac{v_1}{\Delta s_1}=\frac{v_2}{\Delta s_2}.$$

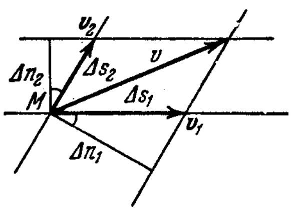

Рис. 4.25. К выводу условия, которому должен удовлетворять чертеж линий тока.

При достаточной густоте линий тока каждую клетку можно приближенно рассматривать как параллелограмм. Обозначим расстояния между линиями тока в данном месте (по нормали к ним) соответственно через Δn_1 и Δn_2. Треугольник со сторонами Δs_1 и Δn_1, очевидно, подобен треугольнику со сторонами Δs_2 и Δn_2 (ибо соответственные стороны взаимно перпендикулярны). Следовательно, имеет место пропорция

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta n_1}=\frac{\Delta s_2}{\Delta n_2},$$

и предыдущее условие запишется в виде

$$\frac{v_1}{\Delta n_1}=\frac{v_2}{\Delta n_2},$$

или в виде

$$v_1\Delta n_2=v_2\Delta n_1.$$

Это равенство можно истолковать физически. Для этого представим себе на плоскости чертежа слой жидкости толщиной в единицу длины. Тогда произведение $v_1\Delta n_2$ можно будет рассматривать как объем жидкости, протекающий в этом слое в единицу времени между двумя соседними линиями тока первого потока. Аналогично произведение $v_2\Delta n_1$ можно рассматривать как объем жидкости, протекающий в единицу времени между двумя соседними линиями тока второго потока. Последнее равенство выражает, таким образом, что эти два объема жидкости должны быть равны между собой. Если обозначить эти объемы жидкости: для первого потока через ΔQ_1, для второго — через ΔQ_2, то можно записать:

$$\Delta Q_1=\Delta Q_2.$$

При соблюдении этого равенства будут одинаковы масштабы, в которых изображены векторы скоростей обоих потоков *в данной* *точке*. Если мы хотим, чтобы масштаб скоростей был одинаков во всех точках чертежа, то, очевидно, нужно ΔQ брать одинаковым для всего чертежа. Итак, при графическом определении линий тока результирующего потока линии тока налагаемых потоков нужно чертить так, чтобы расход между любыми двумя соседними линиями тока первого потока был такой же, как и расход между любыми двумя соседними линиями тока второго потока. При таком способе изображения густота линий тока в данном месте прямо пропорциональна местной скорости потока.

Указанный способ изображения линий тока удобен не только для рассматриваемой частной задачи наложения потоков, а всегда, когда желательно графически изобразить поле скоростей. Сами по себе линии тока, как мы знаем, дают лишь направления векторов скорости; однако если чертить линии тока так, как здесь указано, то по картине линий тока можно определить и величину вектора скорости в каждой точке (если только известен «масштаб» чертежа ΔQ).

Перейдем теперь к случаю симметрично-осевого потока. Рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены для случая плоского потока, можно установить, что и в случае, когда оба налагаемых потока — симметрично-осевые, условием того, чтобы *в данной точке* вектор скорости результирующего потока был диагональю клетки, является равенство $v_1\Delta n_2 = v_2\Delta n_1$. Однако в таком виде распространять равенство на весь чертеж нельзя, так как это нарушило бы уравнение неразрывности движения. Поясним это. Представим себе часть потока, ограниченную двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии, двугранный угол между которыми равен одному радиану. Пусть на одной из этих плоскостей будет расположен рассматриваемый чертеж линий тока. Расход жидкости через элементарную площадку, образованную поворотом отрезка Δn_2 вокруг оси симметрии на угол в один радиан, равен $\Delta Q_1 = v_1\Delta n_2 r$, где r есть расстояние данной клетки от оси симметрии. Аналогично расход жидкости сквозь площадку, образованную поворотом отрезка Δn_1 на угол в один радиан, равен $\Delta Q_2 = v_2\Delta n_1 r$ (радиус поворота r мы считаем одинаковым для всех точек клетки). Таким образом, умножив обе части равенства $v_1\Delta n_2 = v_2\Delta n_1$ на расстояние r данной клетки до оси симметрии, мы сможем записать это равенство в виде $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ и вместе с тем сможем распространить его на весь чертеж, ибо по уравнению неразрывности расход вдоль струйки есть величина постоянная для всей струйки.

Можно и иначе обосновать условие постоянства расхода между каждыми двумя соседними линиями тока, причем доказательство будет относиться одновременно как к случаю плоского, так и к случаю симметрично-осевого потока. Пусть в исходной точке M значение функции тока первого из налагаемых потоков будет ψ_1, значение функции тока второго потока будет ψ_2. Значение функции тока результирующего потока в той же точке тогда будет $\psi_1 + \psi_2$. Следовательно, функция тока результирующего потока должна сохранять одно и то же значение $\psi_1+\psi_2$ во всех точках проходящей через M линии тока. Если мы хотим, чтобы точка M на той же линии тока (рис. 4.26) была точкой пересечения линий тока налагаемых потоков, то необходимо, чтобы приращение функции тока при переходе к соседней линии тока в первом потоке $\Delta\psi_1$ было равно по абсолютной величине и противоположно по знаку приращению функции тока $\Delta\psi_2'$ при переходе к соседней линии тока во втором потоке, т. е. $\Delta\psi_1=-\Delta\psi_2$. Это равенство указывает и направление линий тока результирующего потока. Таким образом, и в случае симметрично-осевого потока линии тока налагаемых потоков нужно чертить так, чтобы расход жидкости между любыми соседними линиями тока, т. е. $\Delta Q=vr\Delta n$ был величиной постоянной.

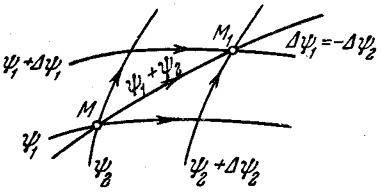

Рис. 4.26. Для того чтобы линия тока результирующего потока проходила через точки пересечения линий тока составляющих потоков, необходимо, чтобы эти линии тока соответствовали равным по абсолютной величине и противоположным по знаку приращениям функции тока.

Метод наложения потоков легче всего уяснить себе на отдельных конкретных примерах. Вместе с тем, на этих примерах мы увидим, как с помощью этого метода получается обтекание разных тел потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

§ 12. Примеры применения метода наложения потоков

Пример 1. **Наложение прямолинейно-поступательного потока на плоский источник.** Представим себе, что в поступательный поток, текущий слева направо со скоростью V, помещен плоский источник с расходом Q.

Определим линии тока и распределение скоростей в результирующем потоке. Это можно сделать двояко: изложенным выше графическим способом или аналитически, составляя выражения для функции тока и потенциала скоростей. Определение линий тока графическим способом показано для данного случая на рис. 4.27. Линии тока поступательного потока изображаются здесь семейством прямых, параллельных V и отстоящих друг от друга на равные расстояния Δy. Линии тока источника на плоскости изображаются семейством лучей, исходящих из центра источника под равными углами друг к другу. Количество этих лучей, необходимых для построения, определяется из того условия, что расход между каждой парой соседних лучей равняется расходу между каждой парой соседних прямых, параллельных V.

Проводя диагонали в построенной таким образом сетке линий тока, мы получим линии тока результирующего потока. Рассмотрим детальнее этот поток. Струйка, которая вытекает из источника справа налево, будет при наложении встречать противоположно направленную струйку поступательного потока. Так как скорость в поступательном потоке постоянна во всех точках, а скорость в поле источника убывает при удалении от центра источника, то влево от центра должна существовать точка A, в которой эти скорости будут равны по абсолютной величине. Результирующий поток будет в этой точке иметь скорость, равную нулю; следовательно, эта точка является точкой торможения потока или критической точкой. Поток здесь