

вательно, функция тока результирующего потока должна сохранять одно и то же значение  $\psi_1 + \psi_2$  во всех точках проходящей через  $M$  линии тока. Если мы хотим, чтобы точка  $M$  на той же линии тока (рис. 4.26) была точкой пересечения линий тока налагаемых потоков, то необходимо, чтобы приращение функции тока при переходе к соседней линии тока в первом потоке  $\Delta\psi_1$  было равно по абсолютной величине и противоположно по знаку приращению функции тока  $\Delta\psi_2$  при переходе к соседней линии тока во втором потоке, т. е.  $\Delta\psi_1 = -\Delta\psi_2$ . Это равенство указывает и направление линий тока результирующего потока. Таким образом, и в случае симметрично-осевого потока линии тока налагаемых потоков нужно чертить так, чтобы расход жидкости между любыми соседними линиями тока, т. е.  $\Delta Q = vr\Delta n$  был величиной постоянной.

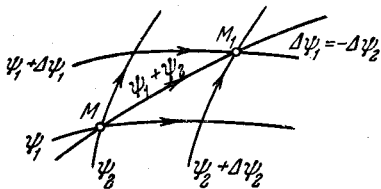


Рис. 4.26. Для того чтобы линия тока результирующего потока проходила через точки пересечения линий тока составляющих потоков, необходимо, чтобы эти линии тока соответствовали равным по абсолютной величине и противоположным по знаку приращениям функции тока.

Метод наложения потоков легче всего уяснить себе на отдельных конкретных примерах. Вместе с тем, на этих примерах мы увидим, как с помощью этого метода получается обтекание разных тел потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

## § 12. Примеры применения метода наложения потоков

**Пример 1. Наложение прямолинейно-поступательного потока на плоский источник.** Представим себе, что в поступательный поток, текущий слева направо со скоростью  $V$ , помещен плоский источник с расходом  $Q$ .

Определим линии тока и распределение скоростей в результирующем потоке. Это можно сделать двояко: изложенным выше графическим способом или аналитически, составляя выражения для функции тока и потенциала скоростей. Определение линий тока графическим способом показано для данного случая на рис. 4.27. Линии тока поступательного потока изображаются здесь семейством прямых, параллельных  $V$  и отстоящих друг от друга на равные расстояния  $\Delta u$ . Линии тока источника на плоскости изображаются семейством лучей, исходящих из центра источника под равными углами друг к другу. Количество этих лучей, необходимых для построения, определяется из того условия, что расход между каждой парой соседних лучей равняется расходу между каждой парой соседних прямых, параллельных  $V$ .

Проводя диагонали в построенной таким образом сетке линий тока, мы получим линии тока результирующего потока. Рассмотрим подробнее этот поток. Струйка, которая вытекает из источника справа налево, будет при наложении встречать противоположно направленную струйку поступательного потока. Так как скорость в поступательном потоке постоянна во всех точках, а скорость в поле источника убывает при удалении от центра источника, то влево от центра должна существовать точка  $A$ , в которой эти скорости будут равны по абсолютной величине. Результирующий поток будет в этой точке иметь скорость, равную нулю; следовательно, эта точка является точкой торможения потока или критической точкой. Поток здесь

разветвляется и огибает центр источника симметрично относительно направления скорости  $V$ . При этом линия тока  $BAD$ , проходящая через точку разветвления потока  $A$ , отделяет жидкость, вытекающую из источника, от жидкости, текущей из бесконечности. Жидкость, вытекающая из источника, остается внутри этой линии тока; жидкость, текущая из бесконечности, — вне ее. Оба налагаемых потока, таким образом, деформируются, но остаются разделенными.

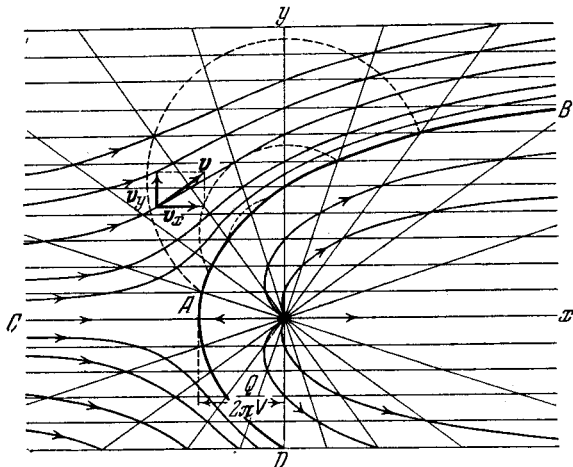


Рис. 4.27. Наложение прямолинейно-поступательного потока на плоский источник.

Можно обнаружить все эти обстоятельства и аналитически. Расположим начало координат в центре источника и направим ось  $x$  по вектору скорости поступательного потока. Функция тока результирующего потока тогда будет равна

$$\psi = Vy + \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Уравнение семейства линий тока запишется в виде

$$Vy + \frac{Q}{2\pi} \theta = \text{const.}$$

Рассмотрим линию тока, которая проходит через точку на оси  $x$ , находящуюся левее центра источника. Для этой линии тока при  $y=0$  должно быть  $\theta = \pi$ , что позволяет найти значение константы, соответствующее этой линии тока; оно будет равно  $Q/2$ .

Таким образом, уравнение этой линии тока будет:

$$Vy + \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2}.$$

Линия тока состоит из двух ветвей:  $\theta = \pi$ , которая представляет собой отрицательную полуось  $x$ , и кривой  $AB$ , уравнение которой получится, если подставить  $y = r \sin \theta$  и определить  $r$ :

$$r = \frac{Q}{2\pi V} \left( \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \right).$$

При  $\theta = \pi$  эта кривая проходит через точку  $A$  на оси абсцисс, и из последнего уравнения сразу определяется расстояние этой точки от начала координат; так как

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} = 1, \text{ то } r_A = \frac{Q}{2\pi V}.$$

При убывании  $\theta$  от значения, равного  $\pi$ , до значения, равного нулю,  $r$  возрастает и при  $\theta = 0$  равно бесконечности. Беря начало в точке  $A$ , находящейся левее центра источника, эта кривая уходит в бесконечность направо и таким образом отделяет жидкость, вытекающую из источника, от всей остальной.

Рассматриваемому примеру можно дать очень интересное истолкование. Вспомним, что контур сечения всякого тела, обтекаемого плоским потоком, является при безотрывном обтекании линией тока. Но можно и, наоборот, всякую линию тока рассматривать как контур сечения твердого тела. Если заменим область, ограниченную линией тока, твердым телом, то остальные линии тока при этом не изменятся и дадут картину обтекания этого твердого тела. Применим это общее соображение к данному случаю. Представим себе, что линия  $SAB$  есть контур твердого тела. Линии тока, расположенные выше  $SAB$ , дадут картину обтекания склона возвышенности (горы) ветром, который набегаёт со стороны равнины. Очертание этого склона определяется приведенным выше уравнением кривой  $AB$ . Зная высоту горы  $H$  и скорость ветра  $V$ , можно из этого же уравнения определить расход источника  $Q$ , которым можно было бы заменить гору. Максимальное значение высоты  $r \sin \theta$  будет при  $\theta = 0$ ; оно равно

$$H = \frac{Q}{2V};$$

отсюда

$$Q = 2VH.$$

Так как для потока, обтекающего эту гору, теперь известны потенциал скоростей и функция тока, то можно найти и распределение скоростей. В частности, можно в любой точке над склоном горы найти вертикальную составляющую скорости. Эти составляющие необходимо знать, например, при решении задачи о дальности и продолжительности планирования. Для вычисления  $v_y$  воспользуемся функцией тока:

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = V \frac{H}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = V \frac{H}{\pi} \frac{\sin \theta}{r},$$

где вместо  $Q$  введена высота  $H$ . Чем меньше  $r$ , тем больше при данном  $\theta$  вертикальная составляющая скорости. Отсюда следует, что вертикальная составляющая скорости достигает своего максимума на поверхности горы (ибо точкам поверхности соответствуют минимальные значения  $r$ ). Если вместо  $r$  подставить его выражение по уравнению кривой  $AB$ , то для скорости  $v_y$  на поверхности горы получим:

$$v_y = V \frac{\sin^2 \theta}{\pi - \theta}.$$

Это выражение достигает максимума при  $\theta = 113,2^\circ$ , т. е. при  $y = 0,37 H$ ; максимальное значение  $v_y$  оказывается равным  $0,725 V$ . Нетрудно видеть, что линиями, где вертикальная составляющая скорости постоянна, являются в данном случае окружности, проходящие через начало координат; центры их расположены на оси  $y$ . Некоторые из них показаны на рис. 4.27.

Заметим в заключение этого примера, что источник, о котором здесь шла речь, на самом деле является фиктивным. В действительности никакого движения жидкости внутри рассматриваемой горы, конечно, не происходит.

Источник здесь является лишь средством, которое позволяет так деформировать прямолинейно-поступательный поток в части плоскости, внешней по отношению к линии  $СAB$ , чтобы получилось обтекание контура горы. Поступательный поток, подходя к горе, отклоняется кверху и деформируется; его деформация такова, как если бы внутри горы находился источник. Таким образом, источник заменяет действие горы на поток.

Если контур горы не совпадает с линией  $AB$ , то всегда можно изменить эту линию, разместив на оси  $x$  дополнительные источники и стоки. Можно их так подобрать, чтобы с достаточной точностью получить обтекание горы с произвольным контуром. Конечно, все эти источники и стоки фиктивные, и они имеют смысл лишь как способ учета влияния твердого тела на набегающий поток.

**Пример 2. Наложение плоского вихря на плоский источник (или сток).** Представим себе, что ось вихря проходит через центр плоского источника (или стока) с расходом  $Q$ . Определим для этого случая результирующий поток. Линии тока плоского вихря изобразятся семейством концентрических окружностей, беспрельдно сгущающихся при приближении к центру. В самом деле, расход жидкости между двумя соседними линиями тока, равный  $\Delta Q = v\Delta r$ , должен быть для всей плоскости величиной постоян-

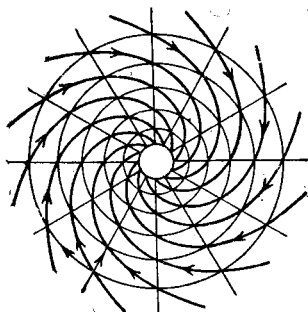


Рис. 4.28. Наложение плоского вихря на плоский сток.

ной, а так как  $v = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ , то это приводит к условию  $\frac{\Delta r}{r} = \frac{2\pi}{\Gamma} \cdot \Delta Q = \frac{2\pi}{\Gamma} \cdot d\psi$ , или в дифференциалах:

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\pi}{\Gamma} d\psi.$$

Отсюда получаем следующее соотношение между радиусом окружности и функцией тока:

$$r = r_0 e^{\frac{2\pi}{\Gamma} \cdot \psi}.$$

где  $r_0$  есть радиус окружности, которая соответствует значению  $\psi = 0$  («нулевая» линия тока). Придавая здесь  $\psi$  ряд равноотстоящих значений ( $\Delta\psi = \Delta Q = \text{const}$ ), будем получать соответствующие значения  $r$ . Накладывая на полученные таким образом линии тока вихря линии тока источника (или стока) и соединяя соответствующие точки пересечения, как это изображено на рис. 4.28, получим линии тока результирующего потока.

Найдем те же линии тока аналитически. Функция тока результирующего потока равна сумме функций тока составляющих потоков; предполагая, что у вихря скорости направлены по часовой стрелке, получим:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Уравнение семейства линий тока будет:

$$\frac{Q}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln c,$$

или в явной форме

$$r = ce^{-\frac{Q}{\Gamma} \cdot \theta}.$$

Это — так называемые логарифмические спирали; при приближении к началу координат каждая из этих кривых делает бесчисленное множество оборотов вокруг начала.

При конструировании гидравлических турбин иногда стремятся, подводя воду к рабочему колесу турбины (которое рассматривается как сток жидко-

сти), сообщить воде предварительное вращательное движение. В таком случае трубы, подводящие воду к рабочему аппарату, очерчиваются по найденным здесь линиям тока.

**Пример 3. Наложение плоского источника на сток. Диполь на плоскости.** Рассмотрим поток, который получается от источника и стока равных расходов. Этот поток интересен по следующей причине. Вспомним первый пример этого параграфа, где было рассмотрено наложение поступательного потока на источник. Если в этом примере взять за контур твердого тела линию  $DAB$  (рис. 4.27), которая отделяет жидкость, вытекающую из источника, от всей остальной, то получим картину обтекания цилиндра, для которого линия  $DAB$  является направляющей. Полости этого цилиндра, для которого линия  $DAB$  является направляющей. Полости этого цилиндра, для которого линия  $DAB$  является направляющей. Полости этого цилиндра, для которого линия  $DAB$  является направляющей. Но если на оси абсцисс, правее начала координат поместить, кроме того, сток с таким же расходом, как и у источника, то

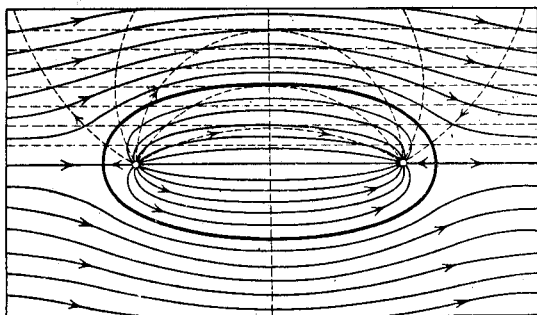


Рис. 4.29. Наложение прямолинейно-поступательного потока на источник и сток равных расходов. Обтекание овального цилиндра.

вся жидкость, вытекающая из источника, будет поглощаться стоком и линия  $DAB$  будет замкнутой, как это представлено на рис. 4.29. Правее центра стока здесь будет вторая критическая точка. Две ветви струйки, разветвляющейся в передней критической точке, во второй критической точке вновь сомкнутся и далее будут следовать вдоль положительного направления оси  $x$ .

Таким образом, накладывая на источник и сток равных расходов поступательный поток, направленный вдоль прямой, соединяющей их центры, мы получим обтекание потенциальным потоком овального цилиндра.

Поэтому интересно рассмотреть сначала поток, который получается от источника и стока равных расходов.

Поместим начало координат посередине расстояния между центром источника и центром стока и за ось  $x$  примем прямую, соединяющую эти центры. Пусть абсцисса центра источника будет  $-\varepsilon$ , абсцисса центра стока  $+\varepsilon$ . При таком расположении системы координат потенциал скоростей и функция тока определяются следующими формулами:

для источника

$$\varphi_{\text{ист}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x + \varepsilon)^2 + y^2}, \quad \psi_{\text{ист}} = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \varepsilon},$$

для стока

$$\varphi_{\text{ст}} = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2}, \quad \psi_{\text{ст}} = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x - \varepsilon}$$

и для результирующего потока

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} [\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}], \quad (4.45)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon} \right]. \quad (4.46)$$

Мы предоставляем читателю добавить к этим  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно потенциал скоростей и функцию тока поступательного потока и исследовать обтекание овального цилиндра, которое при этом получается. Заметим, что отношение полуосей этого цилиндра оказывается тем ближе к единице, чем меньше  $\varepsilon$ . Можно поэтому ожидать, что в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получится обтекание кругового цилиндра. Однако положить  $\varepsilon = 0$  в предыдущих формулах, не вводя дополнительных условий, не имеет смысла, так как тогда получится  $\varphi \equiv 0$  и  $\psi \equiv 0$ .

Поэтому мы рассмотрим несколько иной предельный случай. Пусть расстояние между центрами источника и стока  $2\varepsilon \rightarrow 0$  и одновременно расход каждого из них  $Q \rightarrow \infty$ , но так, что произведение  $2\varepsilon Q$  остается все время постоянной величиной  $M$ :

$$2\varepsilon Q = M = \text{const.}$$

Поток, который при этом получается в пределе из источника и стока на плоскости, называется *плоским диполем*, постоянная  $M$ , характеризующая его, — *моментом диполя*, а ось  $x$ , на которой расположены центры источника и стока, — *осью диполя*. Вычислим потенциал скоростей и функцию тока диполя. Подставим для этого в формулы (4.45) и (4.46) вместо  $Q$  его выражение через константу  $M$ :

$$Q = \frac{M}{2\varepsilon}.$$

Тогда эти формулы примут вид

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}{2\varepsilon},$$

$$\psi = \frac{M}{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

В этих формулах теперь нужно перейти к пределу, устремляя  $\varepsilon$  к нулю; тогда мы получим соответственно  $\varphi_{\text{дип}}$  и  $\psi_{\text{дип}}$ :

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}{2\varepsilon},$$

$$\psi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Заметим, что в каждом из выражений, которые фигурируют здесь под знаком предела, знаменатель можно рассматривать как приращение независимого переменного, а числитель — как соответствующее приращение функции. В самом деле, если возьмем функцию  $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$  и придадим здесь  $x$  значения  $x - \varepsilon$  и  $x + \varepsilon$ , а затем из значения функции, которое соответствует  $x + \varepsilon$ , вычтем то, которое соответствует  $x - \varepsilon$ , то получим числитель первого из выражений. Если возьмем функцию  $\operatorname{arctg} y/x$  и с ней проделаем те же операции, то получим числитель второго выражения. Разность же значений независимого переменного  $(x + \varepsilon) - (x - \varepsilon) = 2\varepsilon$  представляет собой знаменатель обоих выражений. Таким образом, мы имеем здесь дело с вы-

числением предела отношения приращения функции к приращению независимого переменного при стремлении последнего к нулю. Такой предел называется, как известно, производной функцией, и мы, следовательно, можем написать:

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\psi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Произведя вычисление этих производных, окончательно получаем:

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.47)$$

$$\psi_{\text{дип}} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}. \quad (4.48)$$

Иследуем полученный поток. Его линии тока определяются уравнением

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const} = C, \quad \text{или} \quad y = C(x^2 + y^2),$$

откуда

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{C}y = 0.$$

Если к обеим частям этого уравнения прибавить  $1/4C^2$ , то оно примет вид

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$

Отсюда ясно, что линии тока суть окружности, проходящие через начало координат и имеющие центры на оси  $y$ . Так как уравнение линий  $\varphi = \text{const}$  получается в данном случае из уравнения линий  $\psi = \text{const}$  заменой  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , то заключаем отсюда, что линии равного потенциала диполя также суть окружности, проходящие через начало координат, но с центрами, расположенными на оси  $x$ . Картина линий тока и линий равного потенциала диполя представлена на рис. 4.30.

В этом потоке жидкость вытекает из некоторой точки (начало координат в рассматриваемом случае) налево, частицы жидкости описывают окружности, и затем жидкость втекает в ту же точку с правой стороны. Эта точка является здесь одновременно центром источника и центром стока.

Заметим в заключение этого примера, что диполь можно получить и иным путем, нежели это было сделано здесь. Мы исходили из потока, кото-

рый получается в результате наложения источника и стока равных расходов. Можно, однако, исходить из потока, который получается от наложения двух плоских вихрей противоположного направления вращения с равной (по абсолютной величине) константой  $\Gamma$ . Если центры таких вихрей разместить на оси  $y$  на равных расстояниях от начала и затем приближать их к началу, одновременно увеличивая до бесконечности величину  $\Gamma$ , то в пределе получится тот же диполь. Предоставляем читателю проверить это.

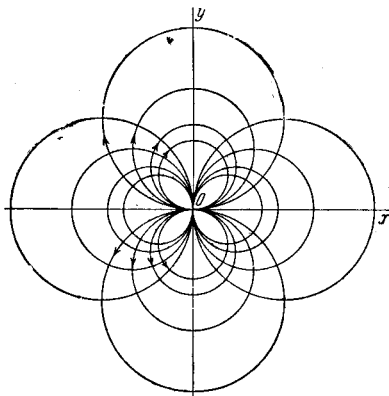


Рис. 4.30. Линии тока и линии равного потенциала плоского диполя.

Если с двумя диполями, моменты которых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, проделать те же операции, что в рассмотренном примере с источником и стоком, то получится новый поток, который является, так сказать, диполем второго порядка. Можно по такому способу получать диполи все более высокого порядка, называемые мультиполями.

### § 13. Обтекание кругового цилиндра потенциальным потоком несжимаемой жидкости

**1. Обтекание кругового цилиндра поступательным потоком.** Предыдущий пример позволяет перейти к изучению обтекания кругового цилиндра. Наложим на диполь поступательный поток со скоростью  $V$ , направленный слева направо. Потенциал скоростей и функцию тока результирующего потока получим, складывая потенциал скоростей и функцию тока поступательного потока соответственно с выражениями (4.47) и (4.48):

$$\varphi = Vx + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = Vy - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.49)$$

Приравняв  $\psi$  постоянной величине, получим уравнение семейства линий тока:

$$Vy - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

или, после упрощений:

$$y \left[ V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} \right] = C(x^2 + y^2).$$

Как видно из этого уравнения, линии тока здесь суть кривые третьего порядка. Особенно простой вид имеет уравнение линии тока, которая соответствует значению параметра  $C$ , равному нулю:

$$y \left[ V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} \right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} = 0.$$

Первое изображает собой ось  $x$ , а второе — окружность с центром в начале координат и радиусом  $r_0$ , равным

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi V}}.$$

Таким образом, в рассматриваемом потоке есть струйка, которая направляется из бесконечности вдоль оси  $x$  (рис. 4.31) и в точке  $A$  разветвляется, причем каждая из ее ветвей огибает полуокружность радиуса  $r_0$ . В точке  $B$  обе ветви вновь смыкаются, и струйка продолжает свое движение вдоль оси  $x$ . Остальные линии тока располагаются так, как это представлено на рис. 4.31, где дано их графическое построение по точкам пересечения линий тока накладываемых потоков. Вспомним теперь, что каждую линию тока можно принять за контур сечения твердого тела. В частности, если взять окружность  $AB$  за контур кругового цилиндра радиуса  $r_0$ , то линии тока, внешние к этой окружности, дадут картину обтекания такого цилиндра потоком, перпендикулярным к его образующим. Зная радиус цилиндра  $r_0$  и скорость потока в бесконечности  $V$ , можно из последней формулы вычис-