

Если с двумя диполями, моменты которых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, проделать те же операции, что в рассмотренном примере с источником и стоком, то получится новый поток, который является, так сказать, диполем второго порядка. Можно по такому способу получать диполи все более высокого порядка, называемые мультиполями.

### § 13. Обтекание кругового цилиндра потенциальным потоком несжимаемой жидкости

**1. Обтекание кругового цилиндра поступательным потоком.** Предыдущий пример позволяет перейти к изучению обтекания кругового цилиндра. Наложим на диполь поступательный поток со скоростью  $V$ , направленный слева направо. Потенциал скоростей и функцию тока результирующего потока получим, складывая потенциал скоростей и функцию тока поступательного потока соответственно с выражениями (4.47) и (4.48):

$$\varphi = Vx + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = Vy - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.49)$$

Приравняв  $\psi$  постоянной величине, получим уравнение семейства линий тока:

$$Vy - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

или, после упрощений:

$$y \left[ V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} \right] = C(x^2 + y^2).$$

Как видно из этого уравнения, линии тока здесь суть кривые третьего порядка. Особенно простой вид имеет уравнение линии тока, которая соответствует значению параметра  $C$ , равному нулю:

$$y \left[ V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} \right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad V(x^2 + y^2) - \frac{M}{2\pi} = 0.$$

Первое изображает собой ось  $x$ , а второе — окружность с центром в начале координат и радиусом  $r_0$ , равным

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi V}}.$$

Таким образом, в рассматриваемом потоке есть струйка, которая направляется из бесконечности вдоль оси  $x$  (рис. 4.31) и в точке  $A$  разветвляется, причем каждая из ее ветвей огибает полуокружность радиуса  $r_0$ . В точке  $B$  обе ветви вновь смыкаются, и струйка продолжает свое движение вдоль оси  $x$ . Остальные линии тока располагаются так, как это представлено на рис. 4.31, где дано их графическое построение по точкам пересечения линий тока накладываемых потоков. Вспомним теперь, что каждую линию тока можно принять за контур сечения твердого тела. В частности, если взять окружность  $AB$  за контур кругового цилиндра радиуса  $r_0$ , то линии тока, внешние к этой окружности, дадут картину обтекания такого цилиндра потоком, перпендикулярным к его образующим. Зная радиус цилиндра  $r_0$  и скорость потока в бесконечности  $V$ , можно из последней формулы вычис-

лить момент  $M$  диполя, который нужно представить себе помещенным на оси цилиндра, для того чтобы получить его обтекание:

$$M = 2\pi V r_0^2. \quad (4.50)$$

Мы можем теперь определить потенциал скоростей и функцию тока для потока, обтекающего *заданный* круговой цилиндр с *заданной скоростью* в бесконечности. Для этого подставим в формулы (4.49) вместо  $M$  его значение, выраженное через  $V$  и  $r_0$ . Тогда будем иметь:

$$\varphi = Vx \left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2}\right) = V \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cos \theta, \quad (4.51)$$

$$\psi = Vy \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2}\right) = V \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \sin \theta. \quad (4.52)$$

Не представляет труда найти теперь компоненты скорости в любой точке этого потока. Проще всего сделать это в полярной системе координат,

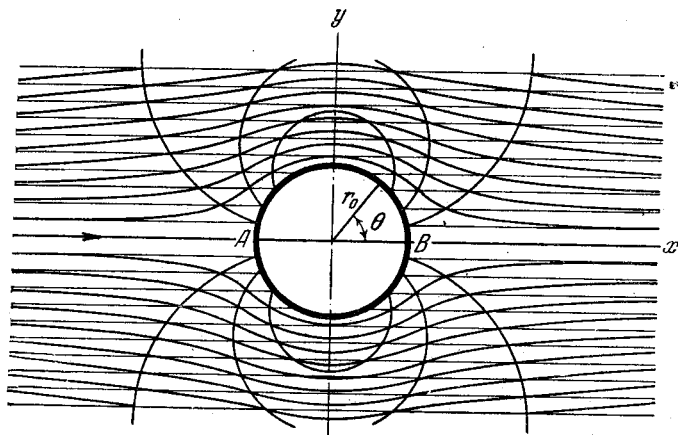


Рис. 4.31. Наложение прямолинейно-поступательного потока на диполь. Обтекание кругового цилиндра потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

вычисляя составляющие вектора скорости по радиусу ( $v_r$ ) и перпендикулярно к нему ( $v_s$ ):

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s};$$

но так как  $s = r\theta$ , то

$$v_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta.$$

Полагая в этих формулах  $r = r_0$ , получим распределение скоростей по контуру цилиндра:

$$v_r = 0, \quad v_s = -2V \sin \theta. \quad (4.53)$$

Мы видим, таким образом, что скорость потока на контуре кругового цилиндра при его потенциальном обтекании не зависит от радиуса цилиндра и равна удвоенному произведению скорости потока в бесконечности на синус соответствующего полярного угла. Знак минус указывает при этом на то, что направление скорости на верхней половине контура цилиндра обратно положительному направлению отсчета углов  $\theta$  (и дуг  $s$ ).

Формула (4.53) показывает, что скорость на контуре цилиндра достигает максимального значения, равного  $2V$  при  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , т. е. в середине сечения цилиндра. В точках  $A$  и  $B$ , т. е. при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , скорость равна нулю; эти точки являются, следовательно, критическими точками нулевой скорости.

Распределение скоростей по контуру кругового цилиндра целесообразно представить также в прямоугольной системе координат, как это делается обычно для профилей крыльев. Так как для точек на контуре цилиндра  $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r_0^2}}$ , то  $\frac{v_s}{V} = -2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{r_0^2}}$ , или  $\frac{v_s^2}{(2V)^2} + \frac{x^2}{r_0^2} = 1$ . Отсюда видно, что распределение скорости вдоль оси  $x$  (по хорде цилиндра) изображается эллипсом, полуоси которого равны  $r_0$  и  $2V$  (рис. 4.32).

Вспользуемся полученными результатами для того, чтобы вычислить с помощью уравнения Бернулли распределение давлений по контуру цилиндра. Так как поток мы предполагаем потенциальным и, следовательно, пренебрегаем действием сил трения, то уравнение Бернулли будем применять в следующем частном его виде:

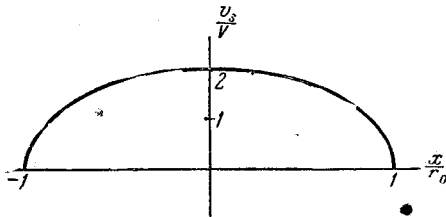


Рис. 4.32. Распределение скорости на контуре кругового цилиндра по оси  $x$ .

для всех точек одной и той же струйки. Выделим струйку, которая течет из бесконечности вдоль оси  $x$  и в точке  $A$  разветвляется, обходя контур цилиндра. Возьмем в этой струйке две точки: одну — далеко перед цилиндром (в бесконечности), а другую — в произвольном месте на контуре. Обозначим давление и скорость в первой из этих точек соответственно через  $p_\infty$  и  $V$ , во второй — через  $p$  и  $v$ . Уравнение Бернулли для этих двух точек можно записать так:

$$p - p_\infty = \frac{\rho V^2}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{V^2} \right). \quad (4.54)$$

Подставляя сюда вместо  $v$  его выражение по формуле (4.53), получаем:

$$p - p_\infty = \frac{\rho V^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta). \quad (4.55)$$

Если характеризовать давление в данной точке, как это обычно принято, безразмерным коэффициентом давления  $\bar{p}$ , то получим:

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho V^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \theta,$$

или, в прямоугольных координатах:

$$\bar{p} = 1 - 4 \left( 1 - \frac{x^2}{r_0^2} \right) = -3 + 4 \frac{x^2}{r_0^2}. \quad (4.56)$$

В левой критической точке  $A$ , т. е. при  $\theta = \pi$  коэффициент давления  $\bar{p}$  равен единице. При уменьшении  $\theta$  от  $\pi$  до  $\pi/2$  давление, как видно из формулы (4.55), непрерывно убывает. Когда  $\theta$  принимает значение, равное  $5\pi/6$  ( $150^\circ$ ), давление  $p$  становится равным  $p_\infty$ ; коэффициент  $\bar{p}$  при этом равен нулю.

Для всех значений  $\theta$  между  $5\pi/6$  и  $\pi/2$  давление меньше  $p_\infty$ . Здесь имеет место, как говорят, «подсасывание», т. е. избыточное давление отрицательно.

В миделевом сечении разность  $p - p_\infty$  достигает величины  $-3\rho V^2/2$  ( $\bar{p} = -3$ ). Абсолютная величина подсосывания, как видим, значительно больше максимального положительного избыточного давления.

Поэтому, если бы пришлось рассчитывать покрытие такого цилиндра на прочность, то в качестве расчетных усилий нужно было бы взять усилия,

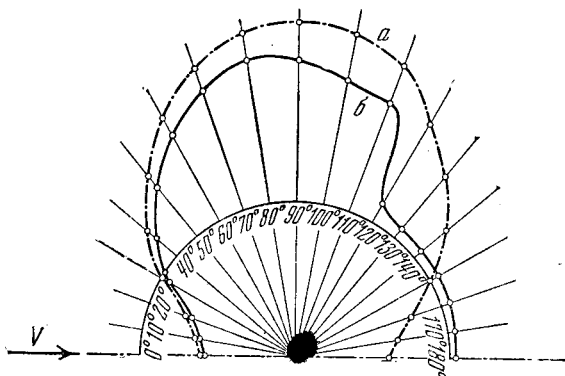


Рис. 4.33. Распределение давления по сечению кругового цилиндра, помещенного в прямолинейно-поступательный поток. Пунктирная кривая изображает теоретическое распределение давления (при потенциальном обтекании), сплошная — экспериментально найденное (для случая, когда диаметр цилиндра 250 мм, скорость потока 39 м/сек).

отрывающие покрытие, а не продавливающие его. Это подтверждается, между прочим, тем известным фактом, что во время сильного ветра крыши зданий отрываюся, а не продавливаются.

Эюра распределения давления, построенная по формуле (4.55), будет иметь вид, представленный на рис. 4.33 (пунктирная кривая  $a$ ). На этой фигуре изображается *векторная* диаграмма. Координатная диаграмма (т. е. зависимость  $\bar{p}$  от  $\bar{x}$ ), построенная по формуле (4.56), изображена на рис. 4.34; она представляет собой параболу.

Если сопоставить распределение давления по круговому цилиндру, вычисленное по формуле (4.55), с найденным экспериментальным путем (испытанием в аэродинамической трубе дренированной модели), то получается следующее. Для передней части цилиндра экспериментальные результаты довольно хорошо совпадают с теоретическими. Для задней же части действительные давления оказываются значительно меньше, нежели те, которые определены теоретически (см. сплошную кривую  $b$  на рис. 4.33).

Это расхождение объясняется главным образом отрывом струи от поверхности цилиндра вблизи его миделевого сечения и образованием вихрей. Вихри увеличивают скорости потока в кормовой части цилиндра (по сравнению со скоростями при потенциальном обтекании) и, следовательно, уменьшают давление. Несмотря на то, что теоретическое распределение давления

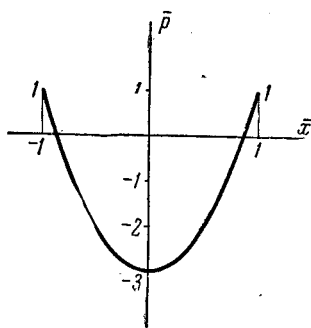


Рис. 4.34. Координатная диаграмма распределения давления по сечению кругового цилиндра.

по круговому цилиндру расходится с экспериментальным, разобранный пример имеет большое значение. Зная поток, обтекающий круговой цилиндр, можно получить, как увидим в дальнейшем, обтекание профиля крыла.

**2. Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией.** Наложим на поток, рассмотренный в предыдущем примере, плоский вихрь, ось которого совместим с осью цилиндра. Осуществить такой вихрь можно, например, вращая цилиндр, находящийся в жидкости, вокруг его продольной оси. Мы рассмотрим случай, когда движение в поле этого вихря происходит по направлению вращения часовой стрелки, т. е. в сторону, противоположную тому направлению, которое мы принимаем за положительное.

Так как в каждом из составляющих потоков имеется линия, совпадающая с контуром кругового цилиндра радиуса  $r_0$ , то и в результирующем потоке будет такая линия тока, и он, следовательно, также представляет собой обтекание кругового цилиндра. Мы будем называть это обтекание обтеканием с циркуляцией.

Потенциал скоростей и функция тока результирующего потока будут равны соответственно

$$\varphi = V \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta,$$

$$\psi = V \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Радиальная и окружная составляющие скорости в этом потоке определяются по формулам

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$v_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

В частности, на контуре цилиндра, т. е. при  $r = r_0$ ,

$$v_r = 0, \quad v_s = -2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (4.57)$$

Таким образом, к скорости обтекания поступательным потоком (формулы (4.53)) добавляется здесь скорость от движения, вызванного вихрем. Нетрудно видеть, что вследствие этого нарушится симметрия потока относительно оси  $x$ , которая была присуща обтеканию кругового цилиндра без циркуляции. Нарушение симметрии потока удобнее всего проследить, найдя положение критических точек на контуре цилиндра; оно определяется соответствующим полярным углом, который назовем  $\theta_{кр}$ ; мы найдем его, приравняв нулю скорость на контуре:

$$-2V \sin \theta_{кр} - \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0.$$

Отсюда

$$\sin \theta_{кр} = -\frac{\Gamma}{4\pi V r_0}.$$

Этому значению синуса соответствуют, вообще говоря, два угла  $\theta_{кр}$ ; определяемые ими точки на контуре должны находиться в третьем и четвертом квадрантах, так как  $\sin \theta_{кр}$  в рассматриваемом случае — величина отрицательная. При данных  $V$  и  $r_0$  величина  $\sin \theta_{кр}$  зависит только от интенсивности вихря: чем больше величина  $\Gamma$ , тем больше смещение критических точек от концов горизонтального диаметра. В случае, когда  $\Gamma < 4\pi V r_0$ , по-

следнему равенству удовлетворяют два разных значения  $\theta_{кр}$  и критические точки расположены так, как показано на рис. 4.35, в. При  $\Gamma = 4\pi Vr_0$   $\sin \theta_{кр} = -1$  и обе критические точки сливаются в одну, находящуюся на нижнем конце вертикального диаметра (рис. 4.35, б). В случае, если  $\Gamma > 4\pi Vr_0$ , критических точек на контуре цилиндра нет и поток имеет вид, показанный на рис. 4.35, а. Критическая точка в этом случае находится в потоке вне цилиндра (т. е. имеет  $r > r_0$ ). Некоторая часть жидкости циркулирует здесь вокруг цилиндра и не уходит в бесконечность, как вся остальная жидкость. Как показывают опыты, при дальнейшем увеличении  $\Gamma$  образуются дополнительные области циркулирующей жидкости, также отделенные от всей остальной массы замкнутыми линиями тока.

Вызванное вихрем нарушение симметрии потока относительно горизонтальной оси приводит к тому, что и давления распределяются по контуру цилиндра несимметрично. Нетрудно видеть, что скорости потока в верхней части цилиндра будут больше, а в нижней — меньше, чем при бесциркуляционном обтекании, ибо в верхней части скорости обоих накладываемых потоков направлены в одну и ту же сторону, а в нижней части — в противоположные стороны. Отсюда, на основании уравнения Бернулли, можно заключить, что в верхней части цилиндра давления будут меньше, а в нижней части больше, чем в тех же местах при бесциркуляционном обтекании. Очевидно, что вследствие симметрии потока относительно вертикальной оси результирующая этих давлений будет направлена в данном случае вертикально вверх и, следовательно, цилиндр в рассматриваемом потоке будет иметь подъемную силу. Это явление настолько интересно, что мы не ограничимся изучением только кинематики данного потока, а определим также действующую на цилиндр подъемную силу. Вычислим сначала распределение давлений по контуру цилиндра. Для этого применим уравнение Бернулли, так же как это было сделано в предыдущем случае, но только вместо  $v$  подставим его выражение по формуле (4.57); тогда получим:

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho V^2}{2} \left( 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2 r_0^2} - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi r_0 V} \right).$$

Распределение давлений, которое получается по этой формуле, представлено в виде векторной диаграммы на рис. 4.36 (для случая, когда  $\sin \theta_{кр} = -\sqrt{2}/2$ ).

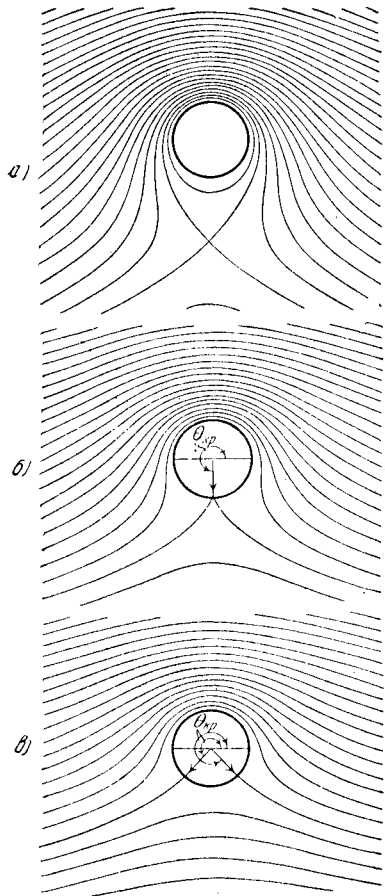


Рис. 4.35. Линии тока при обтекании кругового цилиндра с циркуляцией: а) случай  $\Gamma > 4\pi Vr_0$ ; б) случай  $\Gamma = 4\pi Vr_0$ ; в) случай  $\Gamma < 4\pi Vr_0$ .

Составим теперь выражение для подъемной силы. Выделим на поверхности цилиндра элементарную прямоугольную площадку, основание которой в плоскости поперечного сечения цилиндра равно  $r_0 d\theta$ , а высота равна единице длины. Аэродинамическая нагрузка на эту площадку выразится произведением  $(p - p_\infty) r_0 d\theta$ . Проекция этой нагрузки на ось  $y$  равна

$$-(p - p_\infty) r_0 d\theta \cos(\widehat{n, y}).$$

Для того чтобы получить результирующую подъемную силу  $Y$ , действующую на единицу длины рассматриваемого цилиндра, нужно, очевидно, проинтегрировать это выражение по всей окружности поперечного сечения, т. е. по  $\theta$  от нуля до  $2\pi$ :

$$Y = -r_0 \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) \cos(\widehat{n, y}) d\theta,$$

или, так как  $\cos(\widehat{n, y}) = \sin \theta$ , то

$$Y = -r_0 \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) \sin \theta d\theta.$$

Подставляя в эту формулу вместо  $p - p_\infty$  его предыдущее выражение, сразу убеждаемся, что интегралы от первых трех слагаемых обращаются в нуль. В самом деле, интегралы от первого и третьего слагаемых приводятся к

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

интеграл от второго слагаемого приводится к

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = -\left( \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Лишь интеграл от последнего, четвертого, слагаемого не равен нулю; он приводится к

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

После подстановки этого значения и сокращений окончательно получаем:

$$Y = \rho V \Gamma.$$

Этот результат представляет собой частный случай общей теоремы Н. Е. Жуковского о подъемной силе, доказанной им в 1906 г. для цилиндра с произвольной формой поперечного сечения. Мы изучим эту теорему в дальнейшем; она является основной при определении подъемной силы крыла.

Следует отметить, что явление возникновения подъемной силы на вращающемся в потоке цилиндре получило интересные технические примене-

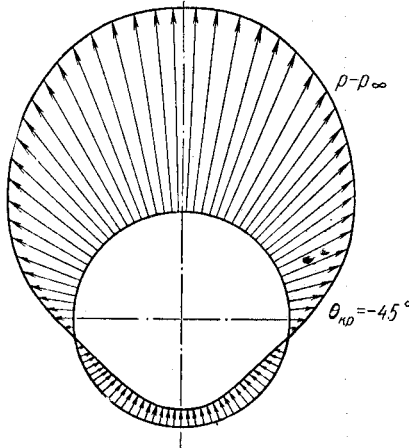


Рис. 4.36. Распределение давлений по сечению кругового цилиндра, обтекаемого с циркуляцией.

ния. Занимаясь вопросом об усовершенствовании парусов, А. Флеттнер в 1923 г. пришел к мысли использовать вместо парусов вращающиеся цилиндры («роторы»). Экспериментальные исследования показали, что приводимый во вращение ротор действует при ветре по тем же законам, что и обыкновенный парус, но имеет то преимущество, что его поверхность значительно меньше, нежели у эквивалентного по силе паруса. На рис. 4.37

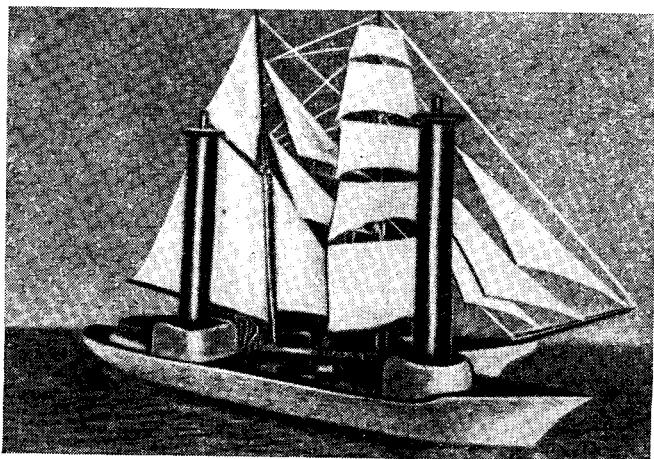


Рис. 4.37. Модели двух лодок: парусной и роторной, которые по испытаниям в аэродинамической трубе оказались почти равноценными.

представлена фотография двух моделей лодок, которые были испытаны в аэродинамической трубе и оказались почти равноценными; площадь парусов здесь в 10 раз больше площади проекции цилиндров.

Для проверки действия роторов на практике был использован трехмачтовый моторнопарусный бриг «Бука» водоизмещением в 778 т (длина брига 45 м, ширина 9 м). Вместо мачт на корабле были установлены две роторные башни высотой в 18,5 м и диаметром в 2,8 м. Испытания, проведенные в 1924 г., показали, что при затрате мощности на вращение роторов в 9 л. с. скорость хода при ветре может достигнуть 8,2 узла, или 15,2 км/час. При этом из ветра извлекается энергия, примерно в 50 раз большая затраченной. Корабль показал при испытании хорошую маневренность и простоту в обслуживании роторов (управлять ими может один человек, тогда как для парусов требуется большая команда).

## § 14. Обтекание шара потенциальным потоком несжимаемой жидкости

**1. Диполь в пространстве.** Рассмотрим теперь поток, который получается из пространственного источника и пространственного стока равных расходов  $Q$  в пределе, когда  $Q \rightarrow \infty$ , а расстояние между центрами источника и стока  $2\epsilon \rightarrow 0$ .

При наложении поступательного потока на поток от источника и стока равных расходов получается обтекание овального тела вращения, подобно тому, как в аналогичных условиях для плоскости получается обтекание