Исходя из любой из последних формул, можно вычислить распределение скоростей в потоке, обтекающем шар.

В частности, для точек, лежащих на поверхности шара, т. е. для которых $\rho = \rho_0$, находим:

$$v_\rho = 0, \quad v_s = -\frac{3}{2} V \sin \vartheta. \tag{4.60}$$

Сравнивая этот результат с результатом, полученным для кругового цилиндра, видим, что скорости на шаре меньше скоростей в соответствующих точках кругового цилиндра; их отношение равно 0,75.

§ 15. Дальнейшее развитие метода наложения потоков. Приведение задачи к интегральному уравнению

Мы видели в предыдущих параграфах, что если соответствующим образом подобрать налагаемые потоки, то можно получить поток, обтекающий то или иное тело. Можно было бы продолжить и дальше процесс постепенного усложнения потоков и при этом всякий раз отыскивать форму тела, обтекание которого получается в найденном потоке. Однако такой процесс при всей своей простоте все же не может удовлетворять нас; отыскание потока, обтекающего то или иное тело, здесь целиком поставлено в зависимость от того, насколько удачно подобраны налагаемые потоки. Такой процесс подбора, хотя и расширяет круг известных нам движений жидкости, все же не может планомерно привести к нахождению потока, обтекающего заданное тело: поиски этого потока производились бы здесь в значительной мере «вслепую». Более того, получив в результате наложения потоков обтекание тела той или иной формы, мы не смогли бы судить об удобообтекаемости этой формы. Удобообтекаемость определяется величиной сопротивления тела, а предполагая поток потенциальным и, следовательно, пренебрегая касательными напряжениями, мы тем самым лишены возможности теоретически определить сопротивление. Поэтому нельзя выбирать таким способом форму тел: при проектировании летательного аппарата формы его частей выбираются из иных соображений, с учетом их сопротивления. Обычно лишь после того, как они выбраны, возникает задача об определении поля скоростей при обтекании их потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

Таким образом, с практической точки зрения оказывается целесообразным поставить по отношению к методу наложения потоков несколько иной вопрос, нежели тот, которым мы занимались в предыдущих параграфах. Там мы налагали известные нам элементарные потоки, исследовали результирующий поток и определяли форму тела, которое можно представить себе погруженным в этот поток без нарушения картины его линий тока. Теперь же поставим вопрос о том, какие потоки и в каких сочетаниях необходимо наложить друг на друга для того, чтобы получить обтекание тела, *форма которого задана*. Оказывается, что приближенно этот вопрос может быть решен, вообще говоря, для любого тела.

В качестве налагаемых потоков проще всего представлять себе источники и стоки. При движении тела в спокойной среде частицы, которые находятся перед телом, расталкиваются им, частицы, которые находятся за телом, устремляются за ним. Линии тока при таком движении исходят из носовой части и заканчиваются на поверхности тела в кормовой его части. Картина движения в среде получается, следовательно, такая, как если бы на поверхности тела или внутри его находились в носовой части источники, в кормовой части — стоки.

Внутри тела можно по-разному располагать центры источников и стоков. Решение задачи не получается при этом однозначным. Более правильным оказывается представлять себе, что источники и стоки (точнее говоря, их центры) распределены на поверхности тела. Так как, вообще говоря, в любой точке, взятой на поверхности тела, берут свое начало или конец линии тока, то центры источников и стоков естественно представить себе непрерывно распределенными по поверхности тела.

Перейдем теперь от движения тела в среде к его обтеканию средой. Будем представлять себе потенциальный поток, обтекающий твердое тело, как результат наложения поступательного потока на систему источников и стоков, центры которых непрерывно распределены по поверхности тела. Существует по этому поводу общая теорема, которую мы здесь доказывать не будем, что всякий вообще потенциальный поток можно рассматривать как полученный от определенной системы источников и стоков.

Для количественной характеристики непрерывно распределенных источников и стоков непригодно понятие о расходе источника-точки. Здесь естественно говорить о расходе жидкости с единицы площади поверхности, по которой распределены источники и стоки. Если ΔQ есть расход жидкости от источников и стоков, распределенных по площадке ΔS, то отношение $\Delta Q/\Delta S$ будет представлять собой расход на единицу площади элемента ΔS. Учитывая, что источники и стоки распределены непрерывно, следует перейти к характеристике их интенсивности в данной точке поверхности. Мы будем называть расходом на единицу площади в данной точке поверхности предел, к которому стремится отношение $\Delta Q/\Delta S$ при стягивании площади ΔS к данной точке. Этот предел обозначим через q:

$$q = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad \left[\frac{м}{сек}\right].$$

Поток, обтекающий тело, будет определен, коль скоро будет известна величина интенсивности q в каждой точке поверхности тела.

Задача об определении потенциального потока, обтекающего заданное тело, сводится, таким образом, к нахождению интенсивности q распределенных по его поверхности источников и стоков. Само собой разумеется, что они не должны создавать в потоке дополнительную жидкость или поглощать ее из потока: вся жидкость, вытекшая из источников, должна быть поглощена в стоках. Отсюда следует, что, каково бы ни было распределение источников и стоков по поверхности тела, суммарный расход от всей системы источников и стоков должен быть равен нулю; это условие можно выразить в виде равенства

$$\int_{(S)} q\,dS = 0.$$

Для отыскания q следует записать граничное условие для потенциала скоростей Φ потока, обтекающего тело: $\partial\Phi/\partial n = 0$ на поверхности тела[1]). Тогда получится уравнение, которому должно удовлетворять искомое q.

Выделим на поверхности тела элементарную площадку dS; расход жидкости от источников и стоков, центры которых расположены на этой площадке, равен $q\,dS$. Ввиду малости площадки dS потенциал скоростей этих источников и стоков можно приближенно определить как потенциал скоростей источника — точки с центром в dS и расходом $q\,dS$. По формуле (4.43) этот потенциал равен

$$\varphi = -\frac{q\,dS}{4\pi\rho},$$

где ρ — расстояние от элемента dS до некоторой точки M в потоке.

[1]) Второе граничное условие при указанном здесь способе образования потока (наложение источников, стоков и поступательного потока) выполняется само собой.

Вычислим составляющую скорости вдоль некоторого направления n, создаваемую источниками или стоками, находящимися на элементе dS; она равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial n}\,dS=\frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{\rho^2}\cos(\widehat{n,\ \rho})\,dS.$$

Проинтегрируем это выражение по всей поверхности S тела и наложим на систему источников и стоков поступательный поток, направленный вдоль оси x и имеющий скорость V (потенциал его равен Vx); тогда получим составляющую вектора скорости вдоль направления n для результирующего потока в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)}\frac{q\cos(\widehat{n,\ \rho})}{\rho^2}\,dS+V\,\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Нам нужно записать теперь, что если точка M находится на поверхности тела, а n есть направление внешней нормали к поверхности в данной точке, то $\partial\Phi/\partial n=0$. Однако последнее выражение непосредственно для этого непригодно, так как оно выражает $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ лишь для точек, находящихся вне поверхности S. Дело в том, что когда точка M приближается к поверхности, расстояние ρ от нее до одного из центров источников стремится к нулю. Когда M находится на поверхности S, соответствующее $\rho=0$. Но формула (4.43), на которой были основаны наши вычисления, применима лишь для точек, в которых $\rho\neq 0$; точка $\rho=0$ является, как мы знаем, особой точкой потока. Поэтому последнее выражение для $\partial\Phi/\partial n$ непосредственно неприменимо к тому случаю, когда точка M находится на поверхности тела. Интеграл в этом выражении является несобственным интегралом. Для того чтобы вычислить $\partial\Phi/\partial n$ и для этого случая окружим мысленно точку M, которая здесь является особой, полусферой произвольно малого радиуса ε (рис. 4.40). Рассмотрим поверхность, которая состоит из S, кроме выделенной с помощью этой полусферы окрестности особой точки, и из поверхности самой полусферы. К такой поверхности формула (4.48), а значит, и предыдущее выражение для $\partial\Phi/\partial n$ применимы во всех точках. В пределе, при $\varepsilon\to 0$ эта поверхность переходит в исходную поверхность S без особой точки. Определим двойной интеграл в выражении для $\partial\Phi/\partial n$ как предел, к которому стремится интеграл, распространенный на эту поверхность при $\varepsilon\to 0$. Интеграл, входящий в выражение для $\partial\Phi/\partial n$, равен сумме

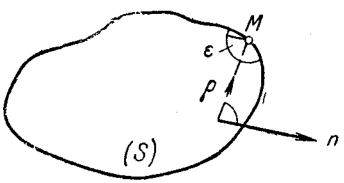

Рис. 4.40. Выделение особой точки с помощью полусферы.

$$\int\limits_{(S-\Sigma)}+\int\limits_{(\Sigma)},$$

где через $S-\Sigma$ мы условно обозначили поверхность S без выделенной окрестности особой точки. Вычислим сначала второй из этих интегралов; для поверхности полусферы $\rho=\varepsilon$, $\cos(\widehat{n,\ \rho})=1$ и, следовательно,

$$\int\limits_{(\Sigma)}\frac{q\cos(\widehat{n,\ \rho})}{\rho^2}\,dS=\int\limits_{(\Sigma)}\frac{q\varepsilon^2 d\Omega}{\varepsilon^2},$$

где $d\Omega$ есть телесный угол, под которым из центра полусферы видна площадка dS. По теореме о среднем значении последний интеграл равен $2\pi q_{\text{ср}}$.

В пределе, при $\varepsilon \to 0$, этот интеграл обращается в $2\pi q$, где под q понимается значение этой величины в точке M.

Первый же интеграл в результате такого предельного перехода дает, по определению несобственного интеграла, интеграл, распространенный на поверхность S.

Итак, в случае, когда точка M находится на поверхности тела, интеграл в выражении для $\partial\Phi/\partial n$ равен сумме

$$2\pi q + \int\limits_{(S)} \frac{q\cos(\widehat{n,\rho})}{\rho^2}\,dS$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_S = \frac{q}{2} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{q\cos(\widehat{n,\rho})}{\rho^2}\,dS + V\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Как видим, нормальная производная потенциала скоростей системы источников и стоков, распределенных по поверхности тела, есть функция прерывная: на поверхности тела, при приближении к поверхности извне, она претерпевает скачок, равный $q/2$.

Приравнивая значения $\partial\Phi/\partial n$ на поверхности тела нулю, получим запись граничного условия для потенциала скоростей в виде

$$\frac{q}{2} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{q\cos(\widehat{n,\rho})}{\rho^2}\,dS = -V\frac{\partial x}{\partial n}. \tag{4.61}$$

Мы получили, таким образом, уравнение для определения неизвестной функции q. Эта функция входит в уравнение (4.61) не только сама по себе, но и под знаком интеграла. Такие уравнения называются интегральными уравнениями по аналогии с дифференциальными, где неизвестная функция входит под знаком производной. В частности, уравнение (4.61) относится к типу неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода[1]).

В последнее время интегральные уравнения находят широкое применение в технических вопросах и, в частности, в аэродинамике. Преимущество их по сравнению с дифференциальными уравнениями заключается в том, что решение интегрального уравнения не нуждается в дополнительном подчинении его граничным условиям. Оно дает окончательный ответ на вопрос, тогда как, решая дифференциальное уравнение, мы находим всего лишь общий интеграл; отыскание же частного интеграла, удовлетворяющего граничным условиям, очень часто представляет наибольшую трудность. Интегральные уравнения совершенно свободны от трудностей, связанных с удовлетворением их решений граничным условиям. Так, например, уравнение (4.61) само представляет запись граничного условия для потенциала скоростей и, следовательно, его решение заведомо удовлетворяет граничным условиям. Вместе с тем уравнение (4.61) вполне эквивалентно уравнению Лапласа (4.34) вместе с граничными условиями (4.35) и (4.36), ибо, как уже указывалось, всякий потенциальный поток, обтекающий твердое тело, может быть сконструирован путем наложения поступательного потока на систему источников и стоков.

К сожалению, теория интегральных уравнений разработана еще недостаточно, и точные решения далеко не всегда можно найти. Как правило, приходится довольствоваться приближенными решениями. В настоящее время существуют два способа приближенного решения интегральных уравнений:

[1]) По теории интегральных уравнений см. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.

способ итераций и способ Фредгольма. Вкратце они заключаются в следующем.

При способе итераций следует задаться такой функцией, которую можно было бы рассматривать как решение интегрального уравнения в первом приближении. Обозначим такую функцию применительно к уравнению (4.61) через q_0 и перепишем уравнение (4.61) в виде

$$\frac{q}{2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{q\cos(\widehat{n, \rho})}{\rho^2}\,dS - V\frac{\partial x}{\partial n}. \tag{4.62}$$

Если в правую часть последнего уравнения вместо q подставить q_0, то из него найдем функцию q_1:

$$\frac{q_1}{2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{q_0\cos(\widehat{n, \rho})}{\rho^2}\,dS - V\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Найденную таким образом функцию q_1 следует вновь подставить вместо q в правую часть уравнения (4.62) и повторить тот же процесс вычислений. Тогда найдем функцию q_2:

$$\frac{q_2}{2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} \frac{q_1\cos(\widehat{n, \rho})}{\rho^2}\,dS - V\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Вычисляя таким способом далее, мы получим последовательность функций $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ Если этот процесс сходящийся, т. е. если последовательность стремится, и притом равномерно, к некоторой предельной функции q, то функции $q_1, q_2, q_3, \ldots$ являются последовательными приближениями к точному решению уравнения (4.62). При удачном выборе функции q_0 достаточно бывает для практических целей проделать два-три приближения. Следует, впрочем, отметить, что трудности вычисления растут очень быстро при переходе к более высоким приближениям.

Способ Фредгольма для приближенного решения интегрального уравнения заключается, коротко, в том, что интеграл, фигурирующий в интегральном уравнении, представляют приближенно в виде конечной суммы. Область интегрирования разбивается при этом на конечное число малых областей, и принимается приближенно, что в каждой такой частичной области подынтегральное выражение сохраняет постоянную величину, равную его значению в какой-либо заранее выбранной точке частичной области. Уравнение (4.61) тогда запишется в виде

$$\frac{q}{2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=m} \frac{q_i\cos(\widehat{n, \rho})_i}{\rho_i^2}\,\Delta S_i = -V\frac{\partial x}{\partial n};$$

здесь значок i указывает, что значение соответствующей функции относится к заранее выбранной точке в i-й области; ΔS_i означает площадь поверхности i-й области, m — общее число областей, на которые разбита поверхность тела S. Если теперь взять на этой поверхности m точек, именно те, которые были выбраны при вычислении интеграла, и для каждой из них написать последнее уравнение, то получится система m алгебраических, линейных относительно q_i уравнений с m неизвестными:

$$\frac{q_k}{2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=m} \frac{q_i\cos(\widehat{n, \rho})_{ik}}{\rho_{ik}^2}\,\Delta S_i = -V\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_k,$$

где $k = 1, 2, \ldots, m$.

Здесь значок $k = 1, 2, \ldots$ указывает номер точки на поверхности тела, для которой написано соответствующее уравнение; ρ_{ik}, например, нужно понимать как расстояние между k-й точкой на поверхности и точкой, выбранной в i-й частичной области (i-й точкой); при этом $i \neq k$, так как особая точка исключена. Решив эту систему уравнений, мы получим m численных значений искомой функции q: $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Чем больше число m, тем, вообще говоря, точнее можно аппроксимировать функцию q с помощью m ее значений.

Очень многое при этом способе зависит от правильного выбора точек в частичных областях. Можно так выбрать m точек, чтобы получить значение интеграла с максимально возможной точностью. Для этого следует приближенно представить интеграл в виде конечной суммы по методу Гаусса или Чебышева[1]). При этом можно, пользуясь m ординатами, получить точное значение интеграла, если под интегралом — целая рациональная функция $2m$-го порядка; для любой другой функции это будет приближенное выражение интеграла, соответствующее приближенной замене подынтегральной функции полиномом $2m$-й степени. Определяя таким способом потенциальное обтекание эллиптического цилиндра, можно получить при системе четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными результат, совпадающий с точным в пяти-шести знаках.

В заключение этого параграфа заметим, что в качестве налагаемых потоков необязательно брать только источники и стоки. Аналогичные в смысле их общности результаты получаются и в том случае, если представить себе, что поверхность тела сплошь покрыта диполями, оси которых направлены по нормали к поверхности в каждой точке. Это — так называемый двойной слой, в отличие от простого слоя, который мы рассматривали выше, распределяя по поверхности источники и стоки. Можно представить себе также, что поверхность тела покрыта вихрями (вихревой слой). Такой вихревой слой на поверхности тела кинематически эквивалентен пограничному слою. Как уже упоминалось, в непосредственной близости к поверхности обтекаемого тела имеет место быстрое изменение скоростей в направлении нормали и, следовательно, вращение частиц. Состоящий из этих частиц пограничный слой можно представить себе замененным вихревым слоем. Задача об определении интенсивности распределенных по поверхности тела вихрей также приводится к интегральному уравнению[2]).

Метод наложения потоков является, как видим, общим методом, позволяющим решать задачу о потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью любого тела.

§ 16. Характеристическая функция плоского потенциального потока несжимаемой жидкости. Метод конформного преобразования

Метод наложения потоков при всей своей общности далеко не всегда является наиболее простым и удобным. В частности, для определения поля скоростей плоского потенциального потока несжимаемой жидкости можно во многих случаях с большим успехом приме-

---

[1]) О методах Гаусса и Чебышева см. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, изд. Академии наук СССР, 1933 или Безикович Я. С., Приближенные вычисления. Гостехиздат, 1948.

[2]) См. по этому поводу Фабрикант Н. Я., Об определении потенциального потока при обтекании тела вращения, Труды Дирижаблестроительного института, Сборник 2, ОНТИ, 1937.