Здесь значок $k=1, 2, \ldots$ указывает номер точки на поверхности тела, для которой написано соответствующее уравнение; ρ_{ik}, например, нужно понимать как расстояние между k-й точкой на поверхности и точкой, выбранной в i-й частичной области (i-й точкой); при этом $i \neq k$, так как особая точка исключена. Решив эту систему уравнений, мы получим m численных значений искомой функции q: $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Чем больше число m, тем, вообще говоря, точнее можно аппроксимировать функцию q с помощью m ее значений.

Очень многое при этом способе зависит от правильного выбора точек в частичных областях. Можно так выбрать m точек, чтобы получить значение интеграла с максимально возможной точностью. Для этого следует приближенно представить интеграл в виде конечной суммы по методу Гаусса или Чебышева[1]). При этом можно, пользуясь m ординатами, получить точное значение интеграла, если под интегралом — целая рациональная функция $2m$-го порядка; для любой другой функции это будет приближенное выражение интеграла, соответствующее приближенной замене подынтегральной функции полиномом $2m$-й степени. Определяя таким способом потенциальное обтекание эллиптического цилиндра, можно получить при системе четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными результат, совпадающий с точным в пяти-шести знаках.

В заключение этого параграфа заметим, что в качестве налагаемых потоков необязательно брать только источники и стоки. Аналогичные в смысле их общности результаты получаются и в том случае, если представить себе, что поверхность тела сплошь покрыта диполями, оси которых направлены по нормали к поверхности в каждой точке. Это — так называемый двойной слой, в отличие от простого слоя, который мы рассматривали выше, распределяя по поверхности источники и стоки. Можно представить себе также, что поверхность тела покрыта вихрями (вихревой слой). Такой вихревой слой на поверхности тела кинематически эквивалентен пограничному слою. Как уже упоминалось, в непосредственной близости к поверхности обтекаемого тела имеет место быстрое изменение скоростей в направлении нормали и, следовательно, вращение частиц. Состоящий из этих частиц пограничный слой можно представить себе замененным вихревым слоем. Задача об определении интенсивности распределенных по поверхности тела вихрей также приводится к интегральному уравнению[2]).

Метод наложения потоков является, как видим, общим методом, позволяющим решать задачу о потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью любого тела.

§ 16. Характеристическая функция плоского потенциального потока несжимаемой жидкости. Метод конформного преобразования

Метод наложения потоков при всей своей общности далеко не всегда является наиболее простым и удобным. В частности, для определения поля скоростей плоского потенциального потока несжимаемой жидкости можно во многих случаях с большим успехом приме-

---

[1]) О методах Гаусса и Чебышева см. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, изд. Академии наук СССР, 1933 или Безикович Я. С., Приближенные вычисления. Гостехиздат, 1948.

[2]) См. по этому поводу Фабрикант Н. Я., Об определении потенциального потока при обтекании тела вращения, Труды Дирижаблестроительного института, Сборник 2, ОНТИ, 1937.

нять иной метод, именно метод конформного преобразования. Введение комплексной переменной значительно упрощает все исследование плоского потенциального потока; оно дает возможность привлечь к решению вопросов аэродинамики хорошо разработанный математический аппарат теории функций комплексного переменного[1]). Благодаря этому аппарату, аэродинамика плоского потенциального потока несжимаемой жидкости приобретает особое изящество и законченность.

Прежде чем вводить комплексную переменную, напомним основные кинематические соотношения для плоского потенциального потока. Такой поток характеризуется двумя функциями, зависящими от координат x, y (а в общем случае неустановившегося движения — еще и от параметра — времени t): потенциалом скоростей $\varphi(x, y)$ и функцией тока $\psi(x, y)$. Каждая из этих функций удовлетворяет в случае несжимаемой жидкости уравнению Лапласа, так что

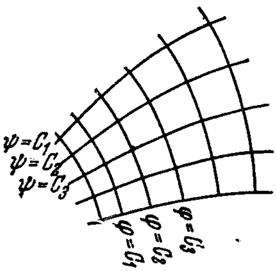

Рис. 4.41. Линии тока и линии равного потенциала образуют в случае плоского потока ортогональную изотермическую сеть.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Потенциал скоростей и функция тока являются, следовательно, в этом случае гармоническими функциями.

Геометрически каждая из этих функций может быть изображена соответствующим семейством линий: функция φ — семейством линий равного потенциала[2])

$$\varphi(x, y)=\text{const},$$

функция ψ — семейством линий тока

$$\psi(x, y)=\text{const}.$$

В § 7 было доказано, что линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала. Следовательно, в случае плоского потока линии тока ортогональны к линиям равного потенциала. Эти два семейства взаимно ортогональных линий образуют сетку в плоскости движения, как показано на рис. 4.41.

В случае установившегося движения жидкость течет по линиям тока; линии равного потенциала в этом случае являются линиями, вдоль которых никакого движения жидкости не происходит.

---

[1]) Сведения по теории функций комплексного переменного читатель может получить из следующих книг: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III; Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва, 1948.

[2]) Поверхностями равного потенциала в случае плоского потока являются цилиндрические поверхности с образующими, перпендикулярными к плоскости движения. Они полностью характеризуются своими направляющими, которые и называются линиями равного потенциала.

Однако не всякие два семейства линий, ортогональных друг к другу, можно рассматривать как семейства линий тока и линий равного потенциала некоторого движения жидкости. Потенциал скоростей и функция тока тесно связаны между собой, и это определяет геометрические соотношения, существующие в сетке линий тока и линий равного потенциала.

Зависимость между потенциалом скоростей и функцией тока плоского потока может быть записана и с помощью выражений для компонентов скорости. Как мы знаем (формулы (4.29)),

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

и если жидкость несжимаема, то в то же время по формулам (4.14)

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Сопоставляя здесь равенства для одноименных составляющих скорости, находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4.63}$$

Зная потенциал скоростей, можно, исходя из этих равенств, определить с точностью до произвольной постоянной функцию тока, и наоборот.

Уравнения (4.63) представляют собой дифференциальные уравнения Коши — Римана, которым удовлетворяют вещественная и мнимая части всякой регулярной функции комплексного переменного $f(z)$ (где $z = x + iy$), и наоборот, если какие бы то ни было функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.63), то эти функции можно рассматривать соответственно как вещественную и мнимую части некоторой регулярной функции комплексного переменного.

Применяя это к данному случаю, можем сказать, что потенциал скоростей и функция тока всякого плоского потока несжимаемой жидкости представляют собой соответственно вещественную и мнимую части регулярной функции комплексного переменного $f(z)$, и наоборот, всякая регулярная функция комплексного переменного $f(z)$ характеризует некоторое плоское движение несжимаемой жидкости, происходящее в плоскостях, параллельных плоскости z. На этом основано применение комплексной переменной к теории плоского потенциального потока несжимаемой жидкости.

Функция

$$w = \varphi + i\psi = f(z)$$

называется *характеристической функцией плоского потока* или *комплексным потенциалом*.

Все кинематические элементы движения могут быть очень просто выражены непосредственно через характеристическую функцию так, что нет надобности для определения этих элементов прибегать к разделению ее на вещественную и мнимую части. Например, беря производную от характеристической функции, находим по известной формуле:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y.$$

Производная от характеристической функции представляет собой, следовательно, вектор, сопряженный с вектором скорости, и называется поэтому сопряженной или комплексной скоростью.

Модуль этой производной дает, очевидно, абсолютное значение вектора скорости в данной точке:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v,$$

а аргумент — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, взятый с обратным знаком.

В дальнейшем мы увидим, что силы, действующие на тело в плоском потенциальном потоке, также выражаются непосредственно через характеристическую функцию.

Введение характеристической функции плоского потока значительно упрощает его исследование, хотя бы потому, что вместо двух функций φ и ψ, каждая из которых зависит от двух независимых переменных x и y, мы имеем здесь одну функцию w, зависящую от одного независимого комплексного переменного z. Эта одна функция полностью заменяет предыдущие две.

Но преимущества, которые получаются от введения комплексной переменной, этим не ограничиваются. Пользуясь установленной выше связью между функциями комплексного переменного и плоскими потоками несжимаемой жидкости, можно значительно расширить круг известных нам потоков, т. е. сделать в случае плоского потока то же, что в общем случае мы делали с помощью метода наложения потоков. В самом деле, пусть нам известна характеристическая функция какого-нибудь плоского потока

$$w=f(z).$$

Возьмем теперь любую аналитическую функцию $F(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$ и эту функцию примем за независимое переменное z в предыдущем равенстве: $z=F(\zeta)$. Тогда функция $w=f(F(\zeta))$ будет представлять собой также аналитическую (регулярную) функцию (за исключением точек, в которых $d\zeta/dz=0$), и следовательно, по доказанному ее можно рассматривать как характеристическую функцию некоторого плоского потока, параллельного плоскости ζ. Таким образом, зная характеристическую функцию для одного какого-нибудь потока, можно с помощью преобразования с разными функциями $F(\zeta)$ получить бесчисленное множество потоков, для которых характеристические функции сразу же определяются подстановкой $z=F(\zeta)$. При надлежащем выборе преобразующей функции $F(\zeta)$ можно получить характеристическую функцию для потока, обтекающего заданное (цилиндрическое) тело; в этом состоит практическая ценность метода комплексной переменной. Н. Е. Жуковский впервые указал такие преобразующие функции, с помощью которых можно определить поле скоростей при обтекании профилей различных крыльев.

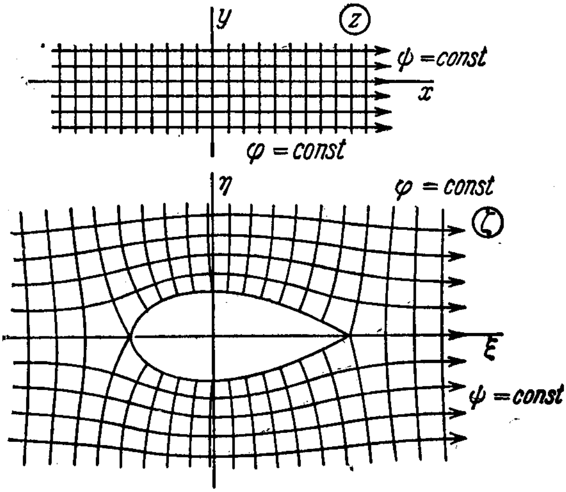

Рис. 4.42. Всякий плоский потенциальный поток может быть получен из потока, обтекающего плоскую пластинку, путем соответствующего конформного преобразования.

Как известно, преобразование плоскости z в плоскость ζ с помощью функции $z=F(\zeta)$ (или, вернее, с помощью обратной функции $\zeta=F_1(z)$) является конформным преобразованием, т. е. преобразованием, при котором сохраняется подобие бесконечно малых элементов (за исключением точек, в которых $d\zeta/dz=0$). При таком преобразовании устанавливается однозначное соответствие между точками плоскости ζ и плоскости z, так что каждая линия L, взятая на плоскости z, переходит в линию λ на плоскости ζ; во всех точках, где $d\zeta/dz\neq 0$, сохраняются углы между соответствующими направлениями на обеих плоскостях и направление отсчета этих углов. Всякий элементарный треугольник, взятый на плоскости z, переходит при этом в геометрически подобный, но иначе расположенный и ориентированный элементарный треугольник на плоскости ζ. Для того чтобы судить об изменении в расположении и ориентации элемента, удобно представить себе обе плоскости (z и ζ) совмещенными друг с другом так, что их начала координат и оси совпадают. Тогда изменение положения элемента, взятого на плоскости z (величина смещения), определяется вектором $\zeta - z$, модуль производной $|d\zeta/dz|$ будет характеризовать изменение линейных размеров элемента (его растяжение или сжатие), а аргумент производной $d\zeta/dz$ — величину поворота элемента. Итак, элемент, взятый на плоскости z, претерпевает при конформном преобразовании перенос, линейное растяжение или сжатие и поворот.

Всякую характеристическую функцию $w = f(\zeta)$ можно рассматривать как полученную путем конформного преобразования $z = f(\zeta)$ из функции $w = z$, которая, как нетрудно видеть, представляет собой характеристическую функцию поступательного потока, текущего вдоль оси x со скоростью, равной единице. Ортогональность линий тока и линий равного потенциала получается при таком способе рассмотрения как следствие конформности преобразования и ортогональности линий тока $x = \text{const}$ и линий равного потенциала $y = \text{const}$ поступательного потока.

Поступательный поток дает обтекание плоской, бесконечно тонкой пластинки, поставленной параллельно вектору скорости (рис. 4.42). Таким образом, обтекание любого контура на плоскости ζ может быть получено путем конформного преобразования из обтекания плоской пластинки на плоскости z.

§ 17. Примеры характеристических функций и конформных преобразований плоских потенциальных потоков

Мы составим теперь в качестве примеров характеристические функции для тех плоских потоков, которые встречались ранее, и затем рассмотрим некоторые примеры конформного преобразования.

Пример 1. *Поступательный поток*, текущий вдоль оси x со скоростью V: $\varphi = Vx$, $\psi = Vy$,

$$w = \varphi + i\psi = V(x + iy) = Vz.$$

Пример 2. *Плоский источник* с центром в начале координат и секундным расходом, равным Q *м²/сек*: $\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r$, $\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$,

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi}\ln re^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi}\ln z.$$

Пример 3. *Плоский вихрь* с осью, проходящей через начало координат:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r,$$

$$w = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}(\theta - i\ln r) = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$