

с другом так, что их начала координат и оси совпадают. Тогда изменение положения элемента, взятого на плоскости z (величина смещения), определяется вектором $\zeta - z$, модуль производной $|d\zeta/dz|$ будет характеризовать изменение линейных размеров элемента (его растяжение или сжатие), а аргумент производной $d\zeta/dz$ — величину поворота элемента. Итак, элемент, взятый на плоскости z , претерпевает при конформном преобразовании перенос, линейное растяжение или сжатие и поворот.

Всякую характеристическую функцию $w = f(\zeta)$ можно рассматривать как полученную путем конформного преобразования $z = f(\zeta)$ из функции $w = z$, которая, как нетрудно видеть, представляет собой характеристическую функцию поступательного потока, текущего вдоль оси x со скоростью, равной единице. Ортогональность линий тока и линий равного потенциала получается при таком способе рассмотрения как следствие конформности преобразования и ортогональности линий тока $x = \text{const}$ и линий равного потенциала $y = \text{const}$ поступательного потока.

Поступательный поток дает обтекание плоской, бесконечно тонкой пластинки, поставленной параллельно вектору скорости (рис. 4.42). Таким образом, обтекание любого контура на плоскости ζ может быть получено путем конформного преобразования из обтекания плоской пластинки на плоскости z .

§ 17. Примеры характеристических функций и конформных преобразований плоских потенциальных потоков

Мы составим теперь в качестве примеров характеристические функции для тех плоских потоков, которые встречались ранее, и затем рассмотрим некоторые примеры конформного преобразования.

Пример 1. *Поступательный поток*, текущий вдоль оси x со скоростью V : $\varphi = Vx$, $\psi = Vy$,

$$w = \varphi + i\psi = V(x + iy) = Vz.$$

Пример 2. *Плоский источник* с центром в начале координат и секундным расходом, равным Q м²/сек: $\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$, $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$,

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln re^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi} \ln z.$$

Пример 3. *Плоский вихрь* с осью, проходящей через начало координат:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$$

$$w = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r) = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln r + i\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Пример 4. Диполь на плоскости с моментом M и осью, совпадающей с осью x :

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$w = \varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x + iy} = \frac{M}{2\pi z}.$$

Пример 5. Поток, обтекающий круговой бесконечно длинный цилиндр перпендикулярно к его образующим (при скорости потока в бесконечности, равной V , и радиусе цилиндра, равном r_0):

$$\varphi = V \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta, \quad \psi = V \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta,$$

$$w = \varphi + i\psi = V \left(r \cos \theta + ir \sin \theta + \frac{r_0^2}{r} \cos \theta - i \frac{r_0^2}{r} \sin \theta \right) = V \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right).$$

Как видно из последнего равенства, известная нам картина обтекания кругового цилиндра может быть получена не только методом наложения потоков. Ее можно получить также методом конформного преобразования из обтекания плоской пластинки поступательным потоком со скоростью V (характеристическая функция $w = Vz$), если положить $z = \zeta + r_0^2/\zeta$ или, что все равно, $\zeta = z/2 \pm \sqrt{z^2/4 - r_0^2}$. Можно непосредственно убедиться в том, что последняя формула преобразует поставленный вдоль потока отрезок прямой на плоскости z в окружность круга на плоскости ζ . Возьмем длину отрезка равной $4r_0$ и расположим его вдоль оси x так, чтобы середина отрезка совпадала с началом координат. При таком расположении для точек, находящихся на этом отрезке, $z = x$ ($-2r_0 < x < 2r_0$). Соответствующие этим точкам точки плоскости ζ определяются из формулы

$$\zeta = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - r_0^2} = \frac{x}{2} \pm i \sqrt{r_0^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Разделяя здесь вещественную и мнимую части, находим координаты ξ и η точек на плоскости ζ :

$$\xi = \frac{x^2}{2}, \quad \eta = \pm \sqrt{r_0^2 - \frac{x^2}{4}};$$

отсюда

$$\xi^2 + \eta^2 = r_0^2.$$

Таким образом, точки, соответствующие взятому на плоскости z отрезку прямой, располагаются в плоскости ζ на окружности с центром в начале координат и радиусом r_0 . Соответствующим образом деформируются все остальные линии тока, создавая картину потока вокруг кругового цилиндра.

Пример 6. Поток, обтекающий круговой цилиндр с циркуляцией. Характеристическая функция получается здесь непосредственно, как сумма характеристических функций предыдущего примера и примера 3:

$$w = V \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

(со знаком минус потому, что направление циркуляционного движения берем по часовой стрелке).

Пример 7. Обтекание плоской пластинки, перпендикулярной к потоку. Применим к потоку, обтекающему круговой цилиндр радиуса r_0 , конформное преобразование

$$\zeta = z - \frac{r_0^2}{z}.$$

Определим, в какой контур переходит при таком преобразовании контур кругового цилиндра. Из формулы для преобразующей функции видно, что всякому вектору z соответствует на плоскости ζ вектор, который получается как результат сложения векторов z и $-r_0^2/z$. Для точек, находящихся

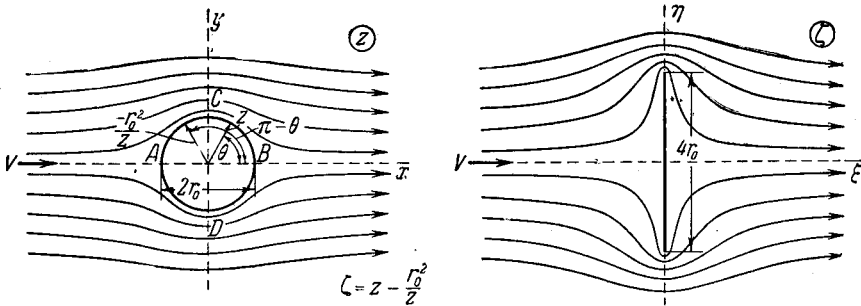


Рис. 4.43. Конформное преобразование потока, обтекающего круговой цилиндр, в поток, обтекающий плоскую пластинку, которая поставлена перпендикулярно к вектору скорости в бесконечности.

на окружности радиуса r_0 , имеет место равенство $z = r_0 e^{i\theta}$; следовательно, для этих точек

$$-\frac{r_0^2}{z} = -\frac{r_0^2}{r_0 e^{i\theta}} = -r_0 e^{-i\theta} = r_0 e^{i(\pi - \theta)}$$

(ибо прибавление числа π к аргументу меняет знак вектора). Второй из складываемых векторов представляет собой, таким образом, зеркальное отображение первого относительно оси y (он имеет тот же модуль и составляет с осью y тот же по абсолютной величине угол, что и первый вектор рис. 4.43). Поэтому в результате сложения получится вектор, направленный по оси x . Все точки окружности перейдут, следовательно, на плоскости ζ в ось ординат. Крайние точки C и D вертикального диаметра перейдут в точки с ординатами, соответственно равными $2r_0$ и $-2r_0$. Контур окружности, таким образом, «сплющится» в вертикальную пластинку длиной $4r_0$.

Вектор скорости потока на бесконечности при рассматриваемом конформном преобразовании не изменится. В самом деле, комплексная скорость на плоскости ζ равна

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta};$$

Рис. 4.44. Двуугольный симметричный профиль.

но $d\zeta/dz$, а следовательно, и обратная величина $dz/d\zeta$ равны в бесконечности единице.

Пример 8. Обтекание симметричного двуугольника вдоль оси.

Двуугольником мы будем называть фигуру, ограниченную двумя пересекающимися окружностями.

Симметричный двуугольник изображен на рис. 4.44. Его можно рассматривать как чечевицеобразный профиль крыла, как схематическое изобра-

жение поперечного сечения корпуса корабля, как сечение удобообтекаемой стойки или пилона и т. д.

Для того чтобы найти характеристическую функцию потока, обтекающего симметричный двугольный профиль, отобразим внешнюю к нему область на область, внешнюю к окружности. Так как характеристическая функция для кругового цилиндра нам известна, то тем самым мы найдем ее и для цилиндра с двугольным профилем.

Применим к потоку, обтекающему двугольный симметричный профиль вдоль оси, преобразование, называемое дробно-линейным:

$$z_1 = \frac{z+l}{z-l}$$

При этом преобразовании точка B ($z=l$) перейдет в бесконечно удаленную точку плоскости z_1 , точка A ($z=-l$) — в начало координат плоскости z_1 , дуги, образующие двугольник, — в полу-прямые¹⁾, исходящие из начала координат.

В силу конформности преобразования угол между этими двумя полупрямыми будет 2δ . Область, внешняя к двугольнику на плоскости z , отобразится на область, внешнюю к углу $C_1A_1D_1$ (на рис. 4.45 она заштрихована). Отсюда вытекает, между прочим, что, зная обтекание двугольника, можно определить обтекание острия с раствором 2δ . Мы не будем на этом останавливаться, а продолжим преобразование. Возьмем функцию

$$z_2 = z_1^k,$$

где

$$k = \frac{\pi}{2(\pi - \delta)}.$$

Нетрудно проверить, что при таком преобразовании прямые, исходящие из начала, переходят на плоскости z_2 также в прямые, исходящие из начала, но соответствующим образом повернутые относительно своего исходного положения. (При возведении в степень аргументы комплексных чисел умножаются на показатель степени.) Луч A_1D_1 после этого преобразования будет составлять с осью абсцисс угол $(\pi - \delta)k = \pi/2$; аналогично находим, что луч A_1C_1 будет составлять с осью абсцисс угол $-(\pi - \delta)k = -\pi/2$. Следовательно, область, внешняя к острию $C_1A_1D_1$, отобразится при этом на правую полуплоскость z_2 (рис. 4.46).

Для того чтобы преобразовать правую полуплоскость во внешность круга радиуса r_0 , возьмем дробно-линейную функцию

$$\zeta = r_0 \frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}.$$

¹⁾ Дуги окружностей рассматриваемого двугольника проходят через точки A и B ; эти точки после преобразования переходят в начало координат и в бесконечность. При дробно-линейном преобразовании окружности переходят в окружности (при этом прямые рассматриваются как окружности), но дуги окружности, проходящие через начало координат и бесконечно удаленную точку, являются прямыми.

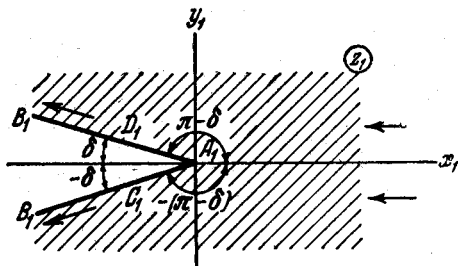


Рис. 4.45. Результат преобразования $z_1 = (z+l)/(z-l)$, примененного к внешней области двугольника.

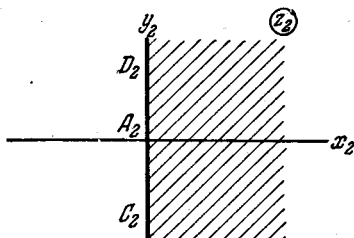
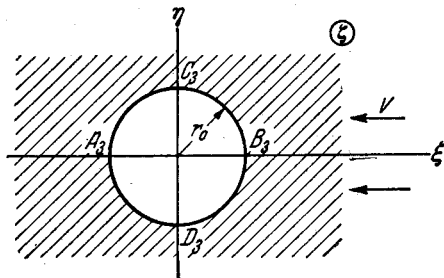


Рис. 4.46. Результат преобразования $z_2 = z_1^k$, примененного к внешности угла $C_1A_1D_1$.

Начало координат плоскости z_2 перейдет при этом преобразовании в точку A_3 (рис. 4.47) на плоскости ζ , причем для этой точки $\zeta = -r_0$; бесконечно удаленная точка плоскости z_2 — в точку B_3 , для которой $\zeta = r_0$; полупрямые A_2D_2 и A_2C_2 — соответственно в нижнюю и верхнюю полуокружности $A_3D_3B_3$ и $A_3C_3B_3$.



Таким образом, функция, преобразующая внешность двугольного профиля на плоскости z во внешность круга на плоскости ζ , имеет окончательно вид

$$\zeta = r_0 \frac{\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^k + 1}{\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^k - 1}$$

Рис. 4.47. Результат преобразования $\xi = r_0(z_2 + 1)/(z_2 - 1)$, примененного к правой полуплоскости.

или несколько иной, более симметричный, который получается из последнего после простых преобразований:

$$\frac{\zeta + r_0}{\zeta - r_0} = \left(\frac{z+l}{z-l}\right)^k.$$

Определение характеристической функции для потока, обтекающего двугольный цилиндр, не представляет теперь никаких принципиальных затруднений. Нужно только в выражение для характеристической функции потока, обтекающего круговой цилиндр на плоскости ζ :

$$w = V \left(\zeta + \frac{r_0^2}{\zeta} \right)$$

подставить вместо ζ его выражение через z . Тогда получим:

$$w = Vr_0 \left[\frac{(z+l)^k + (z-l)^k}{(z+l)^k - (z-l)^k} + \frac{(z+l)^k - (z-l)^k}{(z+l)^k + (z-l)^k} \right] = 2Vr_0 \frac{(z+l)^{2k} + (z-l)^{2k}}{(z+l)^{2k} - (z-l)^{2k}}.$$

Но при конформных преобразованиях, которые привели к этой характеристической функции, претерпевала соответствующие изменения скорость потока в бесконечности. Поэтому, если мы хотим, чтобы двугольник находился в потоке с заданной скоростью в бесконечности V_0 , то следует определить соответствующую этой скорости V_0 скорость в бесконечности V для потока, обтекающего круговой цилиндр. Это можно сделать, исходя из соотношения, которым связаны комплексные скорости в исходном и преобразованном потоках:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}.$$

В бесконечности dw/dz должно равняться заданной скорости V_0 ; бесконечно удаленной точке на плоскости z соответствует бесконечно удаленная точка на плоскости ζ , и при этом значение $dw/d\zeta$ в бесконечности равно V ; подставляя эти значения производных в предыдущее равенство, находим

$$V_0 = V \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_\infty;$$

остается, таким образом, определить лишь значение $d\zeta/dz$ при $z = \infty$.

Дифференцируя функцию

$$\zeta = r_0 \frac{(z+l)^k + (z-l)^k}{(z+l)^k - (z-l)^k},$$

получаем:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 4lr_0k \frac{(z+l)^{k-1} \cdot (z-l)^{k-1}}{[(z+l)^k - (z-l)^k]^2}.$$

При $z \rightarrow \infty$ это выражение имеет своим пределом $4lr_0k$. Следовательно,

$$V_0 = 4lr_0kV,$$

откуда

$$V = \frac{V_0}{4lr_0k}.$$

Подставляя это значение V в выражение для характеристической функции, имеем окончательно:

$$w = \frac{V_0}{2kl} \frac{(z+l)^{2k} + (z-l)^{2k}}{(z+l)^{2k} - (z-l)^{2k}}.$$

Здесь уже фигурируют только те величины, которые непосредственно заданы. Для любого значения z в потоке, обтекающем двугольник, можно теперь найти величину скорости, вычислив модуль производной dw/dz . В частности, можно найти распределение скоростей по контуру двугольника, а затем, по уравнению Бернулли, — распределение давлений. На рис. 4.48 сопоставлены теоретическая кривая распределения давлений, точки которой вычислены так, как здесь описано, и экспериментальная, построенная по результатам измерения давлений на модели в аэродинамической трубе. Кривые относятся к двугольнику с удлинением $l/b = 5$; соответствие теоретических результатов и экспериментальных здесь довольно хорошее, и это позволяет заключить, что действительный поток при обтекании такой формы везде, кроме пограничного слоя, близок к потенциальному.

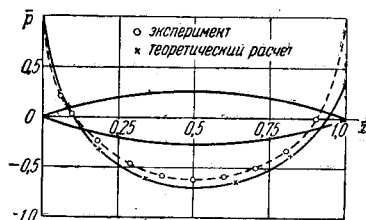


Рис. 4.48. Теоретическое и экспериментальное распределение давлений по контуру двугольника с удлинением $l/b = 5$.

§ 18. Конформное преобразование Жуковского. Обтекание эллиптического цилиндра потенциальным потоком несжимаемой жидкости

Из предыдущего параграфа известно, что характеристическая функция потока, обтекающего круговой бесконечно длинный цилиндр перпендикулярно к его образующим, имеет вид (пример 5)

$$w = V \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right), \quad (4.64)$$

где r_0 есть радиус цилиндра.

Рассмотрим, наряду с плоскостью комплексного переменного z , плоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Поступательный поток, текущий вдоль оси ξ со скоростью V , имеет характеристическую функцию (пример 1)

$$w = V\zeta. \quad (4.65)$$