

Дифференцируя функцию

$$\zeta = r_0 \frac{(z+l)^k + (z-l)^k}{(z+l)^k - (z-l)^k},$$

получаем:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 4lr_0k \frac{(z+l)^{k-1} \cdot (z-l)^{k-1}}{[(z+l)^k - (z-l)^k]^2}.$$

При $z \rightarrow \infty$ это выражение имеет своим пределом $4lr_0k$. Следовательно,

$$V_0 = 4lr_0kV,$$

откуда

$$V = \frac{V_0}{4lr_0k}.$$

Подставляя это значение V в выражение для характеристической функции, имеем окончательно:

$$w = \frac{V_0}{2kl} \frac{(z+l)^{2k} + (z-l)^{2k}}{(z+l)^{2k} - (z-l)^{2k}}.$$

Здесь уже фигурируют только те величины, которые непосредственно заданы. Для любого значения z в потоке, обтекающем двугольник, можно теперь найти величину скорости, вычислив модуль производной dw/dz . В частности, можно найти распределение скоростей по контуру двугольника, а затем, по уравнению Бернулли, — распределение давлений. На рис. 4.48 сопоставлены теоретическая кривая распределения давлений, точки которой вычислены так, как здесь описано, и экспериментальная, построенная по результатам измерения давлений на модели в аэродинамической трубе. Кривые относятся к двугольнику с удлинением $l/b = 5$; соответствие теоретических результатов и экспериментальных здесь довольно хорошее, и это позволяет заключить, что действительный поток при обтекании такой формы везде, кроме пограничного слоя, близок к потенциальному.

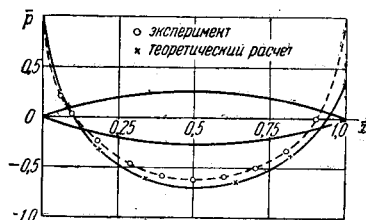


Рис. 4.48. Теоретическое и экспериментальное распределение давлений по контуру двугольника с удлинением $l/b = 5$.

§ 18. Конформное преобразование Жуковского. Обтекание эллиптического цилиндра потенциальным потоком несжимаемой жидкости

Из предыдущего параграфа известно, что характеристическая функция потока, обтекающего круговой бесконечно длинный цилиндр перпендикулярно к его образующим, имеет вид (пример 5)

$$w = V \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right), \quad (4.64)$$

где r_0 есть радиус цилиндра.

Рассмотрим, наряду с плоскостью комплексного переменного z , плоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Поступательный поток, текущий вдоль оси ξ со скоростью V , имеет характеристическую функцию (пример 1)

$$w = V\zeta. \quad (4.65)$$

Сопоставляя друг с другом характеристические функции (4.64) и (4.65), видим, что конформное преобразование

$$\zeta = z + \frac{r_0^2}{z} \quad (4.66)$$

переводит поток, обтекающий на плоскости z окружность с центром в начале координат и радиусом r_0 , в поступательный поток на плоскости ζ . Этот последний, как известно, дает картину обтекания плоской, бесконечно тонкой пластинки, поставленной параллельно вектору скорости.

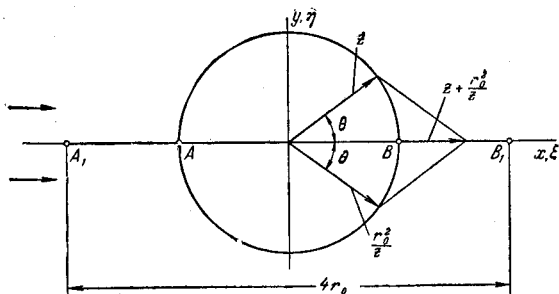


Рис. 4.49. Преобразование окружности в отрезок прямой, параллельной оси, с помощью формулы (4.66).

Можно и непосредственно, из геометрических соображений, убедиться в том, что функция (4.66) действительно выполняет преобразование окружности радиуса r_0 в отрезок прямой, параллельный вектору скорости.

Как видно из формулы (4.66), каждому вектору z соответствует вектор ζ , который получается в результате сложения двух векторов: z и r_0^2/z . Но в точках преобразуемой окружности имеет место соотношение

$$z = r_0 e^{i\theta};$$

следовательно, для этих точек вектор r_0^2/z равен

$$\frac{r_0^2}{z} = r_0 e^{-i\theta}.$$

Таким образом, оба складываемых вектора имеют для точек окружности радиуса r_0 один и тот же модуль r_0 и равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку аргументы. В результате сложения двух таких векторов получится точка на оси абсцисс (рис. 4.49). Для крайних точек горизонтального диаметра преобразуемой окружности (точек A и B) векторы z и r_0^2/z равны друг другу; соответствующие им точки A_1 и B_1 на плоскости ζ будут поэтому иметь абсциссы в два раза большие, нежели абсциссы точек A и B . Промежуточные между A и B точки окружности перейдут на плоскости ζ

в точки, находящиеся на оси абсцисс между A_1 и B_1 ; вся окружность AB как бы сплющится в пластинку A_1B_1 длиной $4r_0$. Когда точка на плоскости z описывает окружность ABA , соответствующая ей точка на плоскости ζ дважды проходит отрезок A_1B_1 : в направлении от A_1 к B_1 и затем обратно — от B_1 к A_1 .

Конформное преобразование (4.66) называется *преобразованием Жуковского*; при надлежащем выборе преобразуемой окружности оно позволяет получать, как увидим в аэродинамике крыла, профили крыльев с произвольными вогнутостью и толщиной.

Рассмотрим более подробно преобразование Жуковского. Выясним, в какие контуры переходят при этом преобразовании окружности с центром в начале координат и радиусом, не равным r_0 . Пусть r будет радиус такой окружности; для точек этой окружности имеем:

$$z = re^{i\theta}, \quad \frac{r_0^2}{z} = \frac{r_0^2}{r} e^{-i\theta}, \quad \zeta = re^{i\theta} + \frac{r_0^2}{r} e^{-i\theta}.$$

Для того чтобы отделить здесь вещественную часть от мнимой, воспользуемся тем, что, как известно

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta;$$

выражение для ζ примет тогда следующий вид:

$$\xi + i\eta = \left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right) \sin \theta.$$

Из этого соотношения между комплексными величинами получаются два соотношения между вещественными величинами:

$$\xi = \left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) \cos \theta, \quad \eta = \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right) \sin \theta. \quad (4.67)$$

Отсюда следует, что между координатами ξ и η точек на плоскости ζ , соответствующих точкам преобразуемой окружности на плоскости z , имеет место зависимость

$$\frac{\xi^2}{\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)^2} = 1.$$

Последнее уравнение показывает, что окружность радиуса r с центром в начале координат, взятая на плоскости z , преобразуется функцией Жуковского в эллипс на плоскости ζ , полуоси которого соответственно равны

$$a = r + \frac{r_0^2}{r}, \quad b = r - \frac{r_0^2}{r}. \quad (4.68)$$

Из аналитической геометрии известно, что абсциссы фокусов эллипса определяются формулой

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

в данном случае

$$c = \pm \sqrt{\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)^2} = \pm 2r_0;$$

это означает, что фокусами эллипса, который получается в результате преобразования, являются точки A_1 и B_1 , вне зависимости от радиуса преобразуемой окружности.

Таким образом, окружности концентрические с основной (мы будем так называть окружность с центром в начале координат и радиусом r_0)

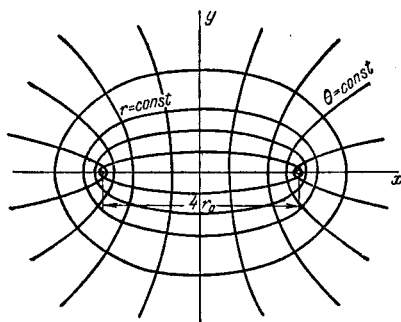


Рис. 4.50. Семейство софокусных эллипсов и гипербол, которые получаются в результате конформного преобразования Жуковского из координатных линий полярной системы координат.

в результате преобразования Жуковского переходят в семейство софокусных эллипсов на плоскости ζ , с фокусным расстоянием, равным $4r_0$ (рис. 4.50).

Рассмотрим теперь прямые линии на плоскости z , исходящие из начала координат ($\theta = \text{const}$), и выясним, в какие линии они переходят на плоскости ζ . Исключая r из равенств (4.67), получаем:

$$\frac{\xi^2}{(2r_0 \cos \theta)^2} - \frac{\eta^2}{(2r_0 \sin \theta)^2} = 1.$$

Из этого уравнения видно, что, полагая $\theta = \text{const}$, будем иметь на плоскости ζ семейство софокусных гипербол. Фокусы расположены в тех же точках A_1 и B_1 , что и фокусы семейства эллипсов.

Софокусные эллипсы и гиперболы образуют семейство взаимно ортогональных линий, которые представляют собой координатные линии так называемой эллиптической системы координат.

Конформное преобразование Жуковского осуществляет, таким образом, преобразование координатных линий полярной системы координат в координатные линии эллиптической системы.

Зная поле скоростей при потенциальном обтекании кругового цилиндра, мы можем теперь вычислить поле скоростей при потенциальном обтекании эллиптического цилиндра вдоль одной из его осей. Для этого следует, имея полуоси эллипса a и b , определить по формулам (4.68) r и r_0 и подставить в характеристическую функцию потока, обтекающего круговой цилиндр радиуса r :

$$w = V \left(z + \frac{r^2}{z} \right)$$

вместо z его значение по формуле Жуковского (4.66); тогда получим характеристическую функцию потока, обтекающего данный эллиптический цилиндр. Однако если необходимо найти распределение скоростей лишь по поверхности эллиптического цилиндра, как наиболее часто требуется в практических задачах, то это можно сделать и не выполняя всех указанных выше выкладок. В этом случае необходимо вычислить лишь модуль вектора скорости, так как направление его известно: оно совпадает с направлением

касательной к эллипсу в рассматриваемой точке. Как было доказано ранее, модуль вектора скорости равен модулю производной от характеристической функции; для точек, находящихся на плоскости ζ , можем, следовательно, написать:

$$v = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|.$$

Вычислим сначала комплексную скорость $dw/d\zeta$:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}} = V \frac{1 - \frac{r^2}{z^2}}{1 - \frac{r_0^2}{z^2}} = V \frac{z^2 - r^2}{z^2 - r_0^2}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right| &= V \frac{|z^2 - r^2|}{|z^2 - r_0^2|} = V \frac{|r^2 e^{2i\theta} - r^2|}{|r^2 e^{2i\theta} - r_0^2|} = V \frac{|(\cos 2\theta - 1) + i \sin 2\theta|}{\left| (\cos 2\theta - \frac{r_0^2}{r^2}) + i \sin 2\theta \right|} = \\ &= V \frac{\sqrt{(\cos 2\theta - 1)^2 + \sin^2 2\theta}}{\sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^2 + \sin^2 2\theta}} = V \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^2 + 4 \frac{r_0^2}{r^2} \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь от величин, относящихся к плоскости z , к величинам, относящимся к плоскости ζ . Из соотношений (4.68) получаем:

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{a-b}{a+b}, \quad 1 - \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{b}{r} = \frac{2b}{a+b};$$

кроме того, из формул (4.67) находим:

$$\sin \theta = \frac{\eta}{r} \frac{1}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}.$$

Подставляя эти величины в выражение для $dw/d\zeta$, будем иметь:

$$\left| \frac{dw}{d\zeta} \right| = 2V \frac{\eta}{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^2 + 4\eta^2 \frac{r_0^2}{r^2}}} = \frac{2V\eta}{\sqrt{\frac{2b^3}{a+b} + 4\eta^2 \frac{a-b}{a+b}}}.$$

Таким образом, получаем следующую формулу для распределения скоростей по контуру эллиптического цилиндра:

$$v = 2V\eta \sqrt{\frac{a+b}{2b^3 + 4(a-b)\eta^2}}, \quad (4.69)$$

или, если выразить ординату η точки на контуре эллипса через ее абсциссу ξ , то

$$v = 2V \sqrt{\frac{(a^2 - \xi^2)(a+b)}{2ba^2 + 4(a-b)(a^2 - \xi^2)}}.$$

При $b=0$ отсюда получается формула для распределения скоростей вдоль продольно обтекаемой плоской пластинки ($v=V$), при $b=a$ — формула (4.53) для распределения скоростей по контуру кругового цилиндра.

Из формулы (4.69) следует, что максимальная скорость на контуре эллиптического цилиндра v_{\max} получается в миделевом сечении, т. е. при $\eta=b$, и равна

$$v_{\max} = 2V \sqrt{\frac{a+b}{4a-2b}}.$$

Если ввести, аналогично тому как это делается в теории крыла, относительную толщину цилиндра \bar{c} , понимая под этим отношение толщины $2b$ к длине хорды $2a$, то формула для v_{\max} может быть представлена в виде

$$v_{\max} = V \sqrt{\frac{2(1+\bar{c})}{2-\bar{c}}}.$$

При малой относительной толщине приближенно (с точностью до малых величин второго порядка) можно считать, что

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\bar{c}} = 1 + \frac{1}{2}\bar{c},$$

и следовательно,

$$v_{\max} \approx V \sqrt{(1+\bar{c})\left(1+\frac{1}{2}\bar{c}\right)} \approx V\left(1+\frac{3}{4}\bar{c}\right).$$

Отсюда видно, что если относительная толщина эллиптического цилиндра возрастает на 10%, то максимальная скорость на его поверхности увеличивается на $\frac{3}{4}$ 0/0.

Решение задачи об обтекании эллиптического цилиндра малой толщины используется в аэродинамике крыла при определении поля скоростей вокруг профиля крыла.

§ 19. Решение уравнения Лапласа для симметрично-осевого потенциального потока несжимаемой жидкости. Продольное обтекание эллипсоида вращения

Наряду с методом наложения потоков для решения уравнения Лапласа часто применяется еще другой общий метод. Он состоит в том, что частное решение уравнения Лапласа ищут в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. Так как уравнение Лапласа является линейным дифференциальным уравнением, то общее решение можно представить как сумму частных решений упомянутого вида. Мы изложим этот метод применительно к симметрично-осевому потоку несжимаемой жидкости. Такой поток, как уже указывалось ранее, имеет место при движении в среде тела вращения вдоль его оси.

Уравнение для потенциала скоростей φ симметрично-осевого потока несжимаемой жидкости известно из предыдущего (равенство 4.40):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Имея в виду изучить обтекание удлиненного тела вращения, введем в это уравнение вместо прямоугольных координат (x, r) в меридиональной плоскости эллиптические координаты. Для того чтобы наиболее просто выразить прямоугольные координаты через эллиптические, рассмотрим конформное преобразование

$$\zeta_1 = e^z.$$

Если представить здесь переменную ζ_1 в виде

$$\zeta_1 = r e^{i\theta},$$

то, сопоставляя это с выражением $e^z = e^x e^{iy}$, находим:

$$r = e^x, \quad \theta = y \quad (0 \leq y \leq 2\pi).$$