

где  $a$  есть большая полуось. Отношение  $a/2r_0$ , где  $r_0$  есть половина фокусного расстояния, называется, как известно, эксцентриситетом эллипса; обозначая его через  $e$ , сможем написать:

$$\lambda_0 = \frac{1}{e}.$$

После указанных подстановок формула для  $v_\mu$  приобретает вид

$$v_\mu = V \left( 1 + \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} - e}{\frac{e}{1-e^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e}} \right) \frac{dx}{ds};$$

здесь  $ds$  есть длина элемента дуги эллипса, которая ранее была обозначена через  $ds_\mu$ . Таким образом, оказывается, что скорость на поверхности эллипсоида вращения пропорциональна  $dx/ds$ , т. е. косинусу угла между касательной в данной точке к меридиональному сечению эллипсоида и осью вращения.

В случае, если относительная толщина эллипсоида  $\bar{c} = b/a$  мала, последняя формула может быть значительно упрощена. Выразим с этой целью  $e$  через  $\bar{c}$ :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = (1 - \bar{c}^2)^{1/2};$$

при малой величине  $\bar{c}$  приближенно можно считать, что

$$e = 1 - \frac{1}{2} \bar{c}^2.$$

Второе слагаемое в скобках в формуле для  $v_\mu$  теперь примет вид

$$\frac{\frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} - e}{\frac{e}{1-e^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e}} = \frac{\frac{1}{2} \ln \left( 2 - \frac{1}{2} \bar{c}^2 \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{c}^2}{2} - 1 + \frac{1}{2} \bar{c}^2}{\frac{1}{\bar{c}^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left( 2 - \frac{1}{2} \bar{c}^2 \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{c}^2}{2}}.$$

В числителе можно пренебречь величиной  $\bar{c}^2$  по сравнению с другими; в знаменателе можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым всеми остальными. Тогда получим:

$$v_\mu = V \left[ 1 + \left( \ln \frac{2}{\bar{c}} - 1 \right) \bar{c}^2 \right] \frac{dx}{ds}.$$

Отсюда видно, что изменение относительной толщины эллипсоида (в пределах малых значений  $\bar{c}$ ) пренебрежимо мало изменяет скорости на его поверхности. Это изменение приблизительно пропорционально  $\bar{c}^2$ , тогда как для эллиптического цилиндра оно пропорционально  $\bar{c}$ . Максимальная скорость на поверхности тонкого эллипсоида  $v_{\mu, \max} = V \left[ 1 + \bar{c}^2 \left( \ln \frac{2}{\bar{c}} - 1 \right) \right]$  вообще мало отличается от  $V$ ; так, например, если  $\bar{c} = 0,1$ , то  $v_{\mu, \max} = 1,02V$ .

## § 20. Вихревые линии и трубки. Понятие об интенсивности вихря

Мы перейдем теперь к изучению кинематики вращательного движения в жидкости. При определении силового взаимодействия жидкости и твердого тела вращательное движение частиц играет огромную роль. Достаточно сказать, что как подъемная сила самолета, так и

его лобовое сопротивление обуславливаются в значительной части именно вращательным движением частиц.

Зная поле скоростей потока, можно по формулам (4.23) вычислить в каждой точке вектор угловой скорости вращения  $\omega$ . Таким образом, наряду с полем скоростей мы получаем поле угловых скоростей вращения частиц. При исследовании поля угловых скоростей вводят обычно понятия, аналогичные тем, которые были введены в § 2 этой главы применительно к полю скоростей. Для описания поля скоростей мы вводили понятие о линиях тока как об огибающих семейства векторов скорости частиц. Аналогично для описания поля угловых скоростей вращения введем понятие о вихревых линиях.

Пусть в момент времени  $t = t_0$  вектор угловой скорости в точке  $A_1$  будет  $\omega_1$ . Возьмем точку  $A_2$ , соседнюю с  $A_1$  и находящуюся на векторе  $\omega_1$ ; пусть в *тот же момент времени*  $t = t_0$  угловая скорость вращения в точке  $A_2$  равна  $\omega_2$ . В точке  $A_3$ , соседней с  $A_2$  и находящейся на  $\omega_2$ , пусть в тот же момент времени угловая скорость равна  $\omega_3$  и т. д. Продолжая это построение, мы получим ломаную линию, состоящую из отрезков векторов угловой скорости. Переходя к пределу при одновременном уменьшении до нуля всех сторон этой ломаной, мы получим линию, которая в каждой точке для данного момента времени является касательной к соответствующему вектору угловой скорости. Эта линия называется *вихревой линией*. Следовательно, вихревую линию можно определить как *оглающую векторов угловой скорости в разных точках потока, взятых в один и тот же момент времени*  $t = t_0$ . Семейство вихревых линий, проведенных через разные точки потока, дает геометрическое изображение направлений вращения частиц в потоке.

Задача об определении семейства вихревых линий по заданному полю векторов угловой скорости приводится к интегрированию дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (4.6). Если через  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  обозначить компоненты элемента  $ds$  вихревой линии, то из условия подобия треугольника, построенного на элементе  $ds$  и его компонентах, и треугольника, построенного на векторе  $\omega$  и его компонентах, получаем следующие дифференциальные уравнения вихревых линий:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (4.74)$$

Кроме понятия о вихревых линиях, при исследовании вращательного движения в жидкости, вводят обычно понятие о *вихревых трубках*. Представим себе элементарный замкнутый контур, проведенный в жидкости. В общем случае через каждую точку этого контура проходит вихревая линия. Все вихревые линии, проходящие через точки упомянутого контура, образуют поверхность, которая называется поверхностью вихревой трубки. Часть жидкости, которая находится внутри этой поверхности, образует вихревую трубку.

Примером вихревой трубки может служить ядро вихря. Все частицы, примыкающие к границе ядра с внутренней стороны, как мы видели в предыдущем параграфе, вращаются. Через каждую такую частицу проходит, следовательно, вихревая линия. Эти линии образуют поверхность, выделяющую из жидкости ядро вихря; оно является, таким образом, вихревой трубкой.

Вектор угловой скорости частицы и вихревая трубка обладают некоторыми свойствами, аналогичными соответственным свойствам вектора линейной скорости и свойствам струйки. Нетрудно убедиться, что вектор угловой скорости  $\omega$  удовлетворяет своего рода «уравнению неразрывности». Вычислим с этой целью  $\operatorname{div} \omega$ ; в прямоугольной системе координат имеем:

$$\operatorname{div} \omega = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}.$$

Подставляя сюда вместо компонент  $\omega$  их выражения через компоненты скорости по формулам (4.23), получим:

$$\operatorname{div} \omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} \right),$$

что равно нулю, ибо порядок дифференцирования можно в данном случае считать безразличным (так как вторые производные от  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  предполагаем непрерывными).

Итак,

$$\operatorname{div} \omega = 0$$

во всех точках занятого жидкостью пространства. Отсюда вытекает, что поток вектора  $\omega$  («расход») сквозь любую замкнутую поверхность  $S$ , т. е.  $\int_{(S)} \omega_n dS$ , также равен нулю<sup>1)</sup>.

В самом деле, равенство нулю дивергенции вектора означает по самому ее определению равенство нулю «расхода» сквозь замкнутую поверхность, стягиваемую к любой точке в занятом жидкостью пространстве. Но тогда равен нулю и «расход» сквозь замкнутую по-

<sup>1)</sup> Это непосредственно следует из теоремы Остроградского, доказываемой в теории векторного поля. Теорема Остроградского устанавливает следующее выражение интеграла, взятого по объему  $V$ , через интеграл, взятый по поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем:

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{(S)} a_n dS;$$

здесь  $\mathbf{a}$  есть некоторый вектор, а  $n$  обозначает направление внешней нормали к поверхности  $S$ . В данном случае  $\int_{(V)} \operatorname{div} \omega dV = 0$ . Следовательно, равен нулю и  $\int_{(S)} \omega_n dS$ .

верхность конечных размеров, ибо его можно рассматривать как сумму «расходов» сквозь элементарные поверхности. Таким образом,

$$\int_{(S)} \omega_n dS = 0 \quad (4.75)$$

для любой замкнутой поверхности.

Применим последнее равенство к замкнутой поверхности, которая получится, если в вихревой трубке провести два произвольных поперечных сечения. Мы имеем здесь в виду поверхность, состоящую из боковой поверхности вихревой трубки между этими сечениями и из поверхностей проведенных сечений. Двойной интеграл, фигурирующий в последнем равенстве, можно представить в данном случае в виде суммы трех интегралов: одного, распространенного на боковую поверхность выделенной части вихревой трубки, и двух других, распространенных соответственно на первое и второе сечения:

$$\int_{(S)} \omega_n dS = \int_{(S_{\text{бок}})} \omega_n dS_{\text{бок}} + \int_{(1)} \omega_{1n} dS_1 + \int_{(2)} \omega_{2n} dS_2.$$

Интеграл, распространенный на боковую поверхность трубки, равен нулю, так как по определению вихревой трубки вихревые линии целиком лежат на ее поверхности и, следовательно, здесь  $\omega_n = 0$ . Интегралы, распространенные на сечения (1) и (2), мы вычислим, исходя из предположения о том, что ввиду малости этих поперечных сечений величину  $\omega_n$  в пределах каждого из них можно считать постоянной и, следовательно, ее можно вынести из-под знака интеграла. Тогда получим, что

$$\int_{(1)} \omega_{1n} dS_1 = -\omega_1 \sigma_1; \quad \int_{(2)} \omega_{2n} dS_2 = \omega_2 \sigma_2,$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — значения угловой скорости соответственно в первом и втором сечениях, а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — площади этих сечений, перпендикулярные к векторам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . (Отрицательный знак в выражении для первого интеграла поставлен потому, что  $\omega_1$  направлено в сторону, противоположную внешней нормали к сечению (1).)

Условие (4.75) принимает в данном случае следующий вид:

$$\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2,$$

или, так как сечения (1) и (2) были взяты произвольно, то можно записать, что вообще в данный момент времени

$$\omega \sigma = \text{const} \quad (4.76)$$

для всех сечений одной и той же вихревой трубки.

Иными словами, если площадь сечения вихревой трубки увеличивается, то угловая скорость вращения во столько же раз уменьшается и наоборот, если  $\sigma$  уменьшается, то  $\omega$  увеличивается.

Эти равенства аналогичны уравнению расхода для струйки несжимаемой жидкости (гл. II, формула (6)). Произведение  $\omega\sigma$  называется *интенсивностью* вихревой трубки в данном сечении; это — величина, аналогичная расходу жидкости через сечение струйки.

Каждое из последних двух равенств выражает так называемую *первую теорему Гельмгольца о вихрях*<sup>1)</sup>. *Интенсивность вихревой трубки есть величина постоянная для всех ее сечений.*

Из этой теоремы вытекает интересное свойство вихревых трубок, аналогичное указанному в гл. II свойству струек. Это свойство можно

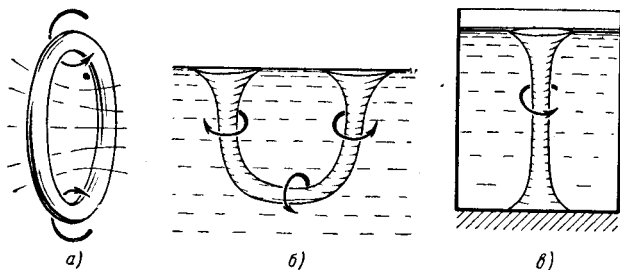


Рис. 4.51. Вихревые трубки могут быть замкнутыми (а) или иметь начало и конец на границах жидкости (б, в).

коротко сформулировать, сказав, что вихревая трубка не может иметь *внутри* жидкости ни начала, ни конца. В самом деле, она не может закончиться внутри жидкости сечением конечного размера, так как это означало бы, что вектор угловой скорости  $\omega$  изменился на конечную величину при переходе в направлении  $\omega$  от последнего сечения трубки в окружающую среду, а это противоречит предположению о непрерывности и дифференцируемости компонент угловой скорости. Вихревая трубка не может также закончиться внутри жидкости острием, так как это означало бы, что  $\sigma \rightarrow 0$  и, следовательно, по теореме Гельмгольца  $\omega \rightarrow \infty$ , что невозможно физически<sup>2)</sup>.

Таким образом, вращение любой частицы внутри жидкости всегда вызывает вращение частицы, следующей за ней по направлению вектора угловой скорости, так что свободный конец вихревой линии или вихревой трубки не может находиться внутри жидкости. Отсюда

<sup>1)</sup> Две другие теоремы Гельмгольца о вихрях относятся к динамике и будут доказаны в следующей главе.

<sup>2)</sup> Мы обращаем внимание читателя на общность первой теоремы Гельмгольца о вихрях, вытекающую из ее чисто кинематического характера. Эта теорема верна вне зависимости от тех сил, которые действуют в жидкости. Между тем в курсах аэродинамики ее зачастую излагают лишь применительно к движению так называемой идеальной, т. е. лишенной сил трения, жидкости, вследствие чего создается неправильное представление о действительных свойствах вихрей.

следует, что для вихревых трубок существуют лишь две возможности: они могут быть замкнутыми или иметь начало и конец на границах жидкости. И то и другое имеет место в действительности. Например, вихревые кольца представляют собой замкнутые вихревые трубки (рис. 4.51, *a*). Если безграничный поток обтекает крыло, то возникающие при этом вихри берут свое начало на его поверхности и простираются вдоль потока до бесконечности. В случае, если жидкость ограничена свободной поверхностью (например, верхняя поверхность жидкости, находящейся в сосуде), то и на этой границе могут находиться концы вихрей, как показано на рис. 4.51, *b* и *в*.

## § 21. Понятие о циркуляции скорости по замкнутому контуру

Из теоремы Гельмгольца видно, что характерным для всякой вихревой трубки является произведение  $\omega z$ , которое и определяет интенсивность вихря.

Однако неудобство понятия об интенсивности вихря заключается в том, что оно введено, собственно говоря, лишь для элементарной вихревой трубки (для трубки с малым поперечным сечением). При распространении этого понятия на вихревые системы, содержащие множество вихрей, пришлось бы вводить представление о средней угловой скорости вращения в данном сечении или же говорить о суммарной интенсивности вихревой системы.

Этого можно избежать, если для характеристики величины суммарной интенсивности вихрей ввести специальное понятие, называемое *циркуляцией скорости по замкнутому контуру*. Для того чтобы выяснить происхождение этого понятия, мы рассмотрим кинематическую картину обтекания крыла.

Допустим, что среда обтекает крыло и на крыло действует при этом подъемная сила. Тогда на нижней поверхности крыла давления  $p$  будут, как правило, больше давления на бесконечности  $p_\infty$ , а на верхней поверхности, как правило,  $p < p_\infty$ . Поэтому скорости течения  $v$  под нижней поверхностью крыла будут меньше скорости на бесконечности  $V$ , а над верхней поверхностью будет  $v > V$ .

Вычтем из скоростей потока, обтекающего крыло, скорости прямолинейно поступательного потока; в результате этого мы получим поток возмущения, т. е. движение, которое возникает в среде от присутствия крыла. В этом потоке возмущения скорости под крылом направлены в сторону, противоположную  $V$  (ибо численно  $v < V$ ), а над крылом — в ту же сторону, что и  $V$  (ибо  $v > V$ ).

Так как влияние крыла местное, т. е. убывает по мере удаления от крыла и равно нулю на бесконечности, то линии тока потока возмущения не уходят на бесконечность. Они должны иметь свое начало и конец на поверхности крыла или быть замкнутыми. В действительности в поток возмущения входят в качестве слагаемых оба этих потока: один, у которого линии тока имеют начало и конец на