

следует, что для вихревых трубок существуют лишь две возможности: они могут быть замкнутыми или иметь начало и конец на границах жидкости. И то и другое имеет место в действительности. Например, вихревые кольца представляют собой замкнутые вихревые трубки (рис. 4.51, *a*). Если безграничный поток обтекает крыло, то возникающие при этом вихри берут свое начало на его поверхности и простираются вдоль потока до бесконечности. В случае, если жидкость ограничена свободной поверхностью (например, верхняя поверхность жидкости, находящейся в сосуде), то и на этой границе могут находиться концы вихрей, как показано на рис. 4.51, *b* и *в*.

## § 21. Понятие о циркуляции скорости по замкнутому контуру

Из теоремы Гельмгольца видно, что характерным для всякой вихревой трубки является произведение  $\omega z$ , которое и определяет интенсивность вихря.

Однако неудобство понятия об интенсивности вихря заключается в том, что оно введено, собственно говоря, лишь для элементарной вихревой трубки (для трубки с малым поперечным сечением). При распространении этого понятия на вихревые системы, содержащие множество вихрей, пришлось бы вводить представление о средней угловой скорости вращения в данном сечении или же говорить о суммарной интенсивности вихревой системы.

Этого можно избежать, если для характеристики величины суммарной интенсивности вихрей ввести специальное понятие, называемое *циркуляцией скорости по замкнутому контуру*. Для того чтобы выяснить происхождение этого понятия, мы рассмотрим кинематическую картину обтекания крыла.

Допустим, что среда обтекает крыло и на крыло действует при этом подъемная сила. Тогда на нижней поверхности крыла давления  $p$  будут, как правило, больше давления на бесконечности  $p_\infty$ , а на верхней поверхности, как правило,  $p < p_\infty$ . Поэтому скорости течения  $v$  под нижней поверхностью крыла будут меньше скорости на бесконечности  $V$ , а над верхней поверхностью будет  $v > V$ .

Вычтем из скоростей потока, обтекающего крыло, скорости прямолинейно поступательного потока; в результате этого мы получим поток возмущения, т. е. движение, которое возникает в среде от присутствия крыла. В этом потоке возмущения скорости под крылом направлены в сторону, противоположную  $V$  (ибо численно  $v < V$ ), а над крылом — в ту же сторону, что и  $V$  (ибо  $v > V$ ).

Так как влияние крыла местное, т. е. убывает по мере удаления от крыла и равно нулю на бесконечности, то линии тока потока возмущения не уходят на бесконечность. Они должны иметь свое начало и конец на поверхности крыла или быть замкнутыми. В действительности в поток возмущения входят в качестве слагаемых оба этих потока: один, у которого линии тока имеют начало и конец на

поверхности крыла (рис. 4.52), и другой, у которого линии тока замкнуты, как это показано на рис. 4.53.

Такой поток с замкнутыми линиями тока называется циркуляционным потоком. В действительности этот поток происходит от вращения частиц в непосредственной близости к крылу (в пограничном слое) и его можно рассматривать как результирующий поток множества вихрей, распределенных по поверхности крыла (рис. 4.54).

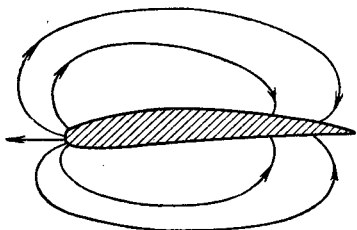


Рис. 4.52. Часть потока возмущения, у которой линии тока имеют начало и конец на поверхности крыла.

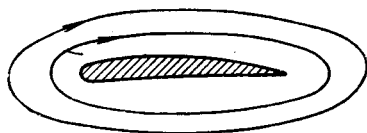


Рис. 4.53. Часть потока возмущения при обтекании крыла, у которой линии тока замкнуты (циркуляционный поток).

Возникает вопрос, как охарактеризовать количественно интенсивность циркуляционного потока. В простейшем случае, когда циркуляционный поток имеет круговые линии тока, т. е. вызывается лишь одним плоским вихрем, интенсивность потока может быть охарактер-

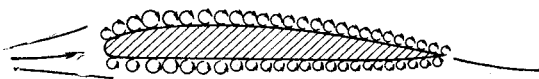


Рис. 4.54. Пограничный слой кинематически можно заменить вихревым слоем, расположенным на поверхности крыла. Этот слой создает вокруг крыла циркуляционный поток.

ризована константой  $\Gamma$  в формуле для распределения скоростей (формула (4.9)). В самом деле, из этой формулы следует, что

$$\Gamma = v \cdot 2\pi r$$

и является величиной постоянной для всех линий тока данного вихря. Ее можно определить, в соответствии с последним равенством, как произведение скорости на длину линии тока. В частном случае, когда движение установившееся, это будет произведение скорости на путь, т. е., условно говоря, работа вектора скорости.

Обобщим теперь это определение на рассматриваемый случай, когда циркуляционный поток получается в результате сложения скоростных полей многих вихрей и, следовательно, когда линии тока некруговые, а скорость непостоянна вдоль линии тока. Назовем *циркуляцией скорости по замкнутому контуру*  $L$  величину контурного интеграла:

$$\Gamma = \oint_{(L)} v_s ds = \oint_{(L)} (v_x dx + v_y dy + v_z dz); \quad (4.77)$$

здесь  $ds$  есть элемент дуги контура,  $v_s$  — проекция скорости на направление элемента  $ds$ .

Отметим, что, вообще говоря, контур  $L$  может и не совпадать с линией тока; поэтому мы ввели в выражение для циркуляции  $\Gamma$  составляющую скорости  $v_s$  вдоль контура, а не  $v$ , как следовало бы в частном случае, когда контур является линией тока. Дело в том, что при вычислении циркуляции нет надобности всякий раз вычитать

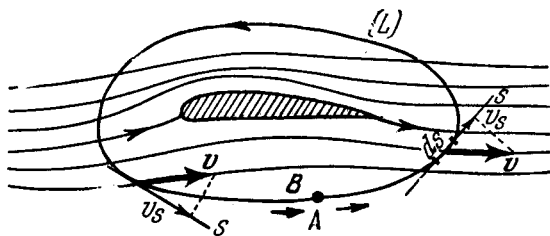


Рис. 4.55. Замкнутый контур  $L$ , охватывающий профиль крыла.

из потока, обтекающего крыло, поступательный поток, как это мы сделали, разъясняя понятие циркуляции. При практическом вычислении это не нужно, потому что поступательный поток сам по себе не изменяет величины вычисляемой циркуляции скорости: для него  $\Gamma = 0$  по любому контуру. Поэтому берут в потоке, обтекающем крыло, произвольный замкнутый контур  $L$ , который может пересекать линии тока, как показано на рис. 4.55, и вычисляют циркуляцию скорости по этому контуру по формуле (4.77).

При вычислении контурного интеграла, входящего в формулу (4.77), за положительное направление обхода контура обычно принимают такое направление, чтобы при обходе по контуру ограничиваемая им область все время оставалась по левую сторону. Обычные определения положительного направления вращения (против хода часовой стрелки, от оси  $x$  к оси  $y$  и т. д.) здесь непригодны, так как, например, для контура, изображенного на рис. 4.56, они давали бы противоречивые указания.

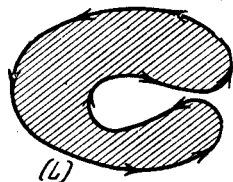


Рис. 4.56. Область, ограниченная контуром (заштрихованная), при обходе по контуру в положительном направлении остается по левую сторону.

Из определения циркуляции скорости следует, что если поток потенциален ( $\omega$  во всем потоке равно нулю), то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному в потоке, равна нулю. В самом деле, в этом случае

$$\Gamma = \oint_{(L)} v_s ds = \oint_{(L)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_B - \varphi_A,$$

где  $B$  — конечная, а  $A$  — начальная точки контура (рис. 4.55). Но так как контур замкнут, то эти точки совпадают, а вследствие того, что потенциал скоростей является в этом случае однозначной функцией координат,  $\varphi_B = \varphi_A$  и  $\Gamma = 0$ .

Рассмотрим теперь общий случай ( $\omega \neq 0$ ) и выясним зависимость между циркуляцией скорости по замкнутому контуру и интенсивностью вихрей, охваченных контуром.

## § 22. Теорема Стокса о циркуляции скорости по замкнутому контуру

Рассмотрим сначала случай элементарного замкнутого контура. Возьмем на плоскости  $xu$  (рис. 4.57) элементарный прямоугольник со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , построенный при точке  $M_0(x, y)$ . При вычислении циркуляции  $\Delta\Gamma_z$ <sup>1)</sup> по этому контуру будем предполагать, что во всех

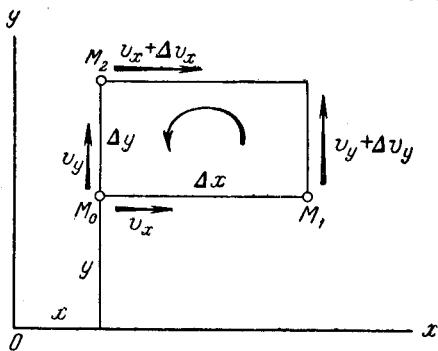


Рис. 4.57. К вычислению циркуляции скорости по элементарному прямоугольнику.

точках каждой из сторон скорость одинакова. Учет изменений скорости вдоль сторон дал бы величины более высокого порядка малости, нежели те, которые мы здесь получим.

Интеграл в формуле (4.77) при этом предположении изобразится в виде конечной суммы:

$$\Delta\Gamma_z = v_x\Delta x + (v_y + \Delta v_y)\Delta y - (v_x + \Delta v_x)\Delta x - v_y\Delta y.$$

Знаки минус в двух последних слагаемых происходят оттого, что положительные направления

составляющих скорости здесь противоположны положительному направлению обхода контура. После сокращения последнее выражение для  $\Delta\Gamma_z$  примет вид

$$\Delta\Gamma_z = \Delta v_y\Delta y - \Delta v_x\Delta x = \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta x} - \frac{\Delta v_x}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Переходя от приращений к дифференциалам, получим:

$$d\Gamma_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\,dy = 2\omega_z\,dx\,dy$$

вследствие формул (4.23). Аналогично можно доказать, что

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = 2\omega_x\,dy\,dz,$$

$$d\Gamma_y = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 2\omega_y\,dx\,dz.$$

<sup>1)</sup> Значок  $z$  указывает здесь на то, что площадка, охваченная контуром, перпендикулярна к оси  $z$ .