

где  $B$  — конечная, а  $A$  — начальная точки контура (рис. 4.55). Но так как контур замкнут, то эти точки совпадают, а вследствие того, что потенциал скоростей является в этом случае однозначной функцией координат,  $\varphi_B = \varphi_A$  и  $\Gamma = 0$ .

Рассмотрим теперь общий случай ( $\omega \neq 0$ ) и выясним зависимость между циркуляцией скорости по замкнутому контуру и интенсивностью вихрей, охваченных контуром.

## § 22. Теорема Стокса о циркуляции скорости по замкнутому контуру

Рассмотрим сначала случай элементарного замкнутого контура. Возьмем на плоскости  $xu$  (рис. 4.57) элементарный прямоугольник со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , построенный при точке  $M_0(x, y)$ . При вычислении циркуляции  $\Delta\Gamma_z$ <sup>1)</sup> по этому контуру будем предполагать, что во всех

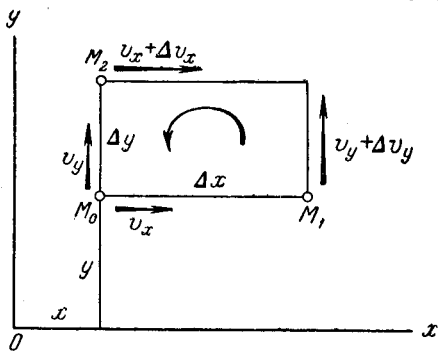


Рис. 4.57. К вычислению циркуляции скорости по элементарному прямоугольнику.

точках каждой из сторон скорость одинакова. Учет изменений скорости вдоль сторон дал бы величины более высокого порядка малости, нежели те, которые мы здесь получим.

Интеграл в формуле (4.77) при этом предположении изобразится в виде конечной суммы:

$$\Delta\Gamma_z = v_x\Delta x + (v_y + \Delta v_y)\Delta y - (v_x + \Delta v_x)\Delta x - v_y\Delta y.$$

Знаки минус в двух последних слагаемых происходят оттого, что положительные направления

составляющих скорости здесь противоположны положительному направлению обхода контура. После сокращения последнее выражение для  $\Delta\Gamma_z$  примет вид

$$\Delta\Gamma_z = \Delta v_y\Delta y - \Delta v_x\Delta x = \left( \frac{\Delta v_y}{\Delta x} - \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta y.$$

Переходя от приращений к дифференциалам, получим:

$$d\Gamma_z = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dx dy$$

вследствие формул (4.23). Аналогично можно доказать, что

$$d\Gamma_x = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 2\omega_x dy dz,$$

$$d\Gamma_y = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 2\omega_y dx dz.$$

<sup>1)</sup> Значок  $z$  указывает здесь на то, что площадка, охваченная контуром, перпендикулярна к оси  $z$ .

Вообще для площадки  $d\sigma$ , произвольным образом ориентированной в пространстве и ограниченной элементарным контуром произвольной формы, имеет место соотношение

$$d\Gamma_n = 2\omega_n d\sigma, \quad (4.78)$$

где  $n$  есть направление нормали к площадке  $d\sigma$ .

Таким образом, циркуляция скорости по элементарному замкнутому контуру равна удвоенному произведению нормальной к площадке составляющей угловой скорости на величину площадки, охваченной контуром. Так как  $\omega_n d\sigma$  представляет собой интенсивность вихревой трубки, для которой  $d\sigma$  есть площадь поперечного сечения, то можно сформулировать соотношение, выражаемое равенством (4.78), еще иначе: *циркуляция скорости по элементарному замкнутому контуру равна удвоенной интенсивности вихря, охваченного этим контуром.*

Формула (4.78), как и вычисление циркуляции скорости по элементарному контуру, является приближенной. При вычислении  $d\Gamma$  мы считали значения составляющих скорости в начальных точках сторон прямоугольника средними значениями для всех точек соответствующих сторон. Все компоненты  $\omega$ , которые здесь фигурируют, представляют собой на самом деле средние значения соответствующих величин в пределах элементарной площадки, а не значения их в некоторой точке.

Для того чтобы получить характеристику вращения в жидкости, выраженную через циркуляцию скорости и относящуюся к данной точке, перейдем в равенстве (4.78) к пределу, устремляя  $d\sigma$  к нулю, т. е. стягивая контур к некоторой внутренней точке. Если разделить предварительно обе

части равенства на  $d\sigma$  и вместо  $d\Gamma_n$  подставить  $\oint_{(\Delta L)} v_s ds$ , где через  $\Delta L$  обозначен элементарный контур, то получится:

$$2\omega_n = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\Delta L)} v_s ds}{d\sigma}.$$

Предел отношения циркуляции скорости по элементарному замкнутому контуру к площадке, ограниченной контуром, при неограниченном уменьшении этой площадки определяет, как видим отсюда, некоторый вектор, проекция которого на направление  $n$  равна удвоенной проекции вектора  $\omega$  на то же направление. Этот вектор называется *вихрем скорости* или *ротором скорости* и обозначается обычно через  $\text{rot } \mathbf{v}$  (от слова *rotor*, *rotation* — вращение) или, иногда,  $\text{curl } \mathbf{v}$  (*curl* — по-английски завиток, локон). Итак,

$$\text{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\Delta L)} v_s ds}{d\sigma},$$

или, если выразить через вектор угловой скорости  $\omega$ , то

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega.$$

Мы видим, таким образом, что можно определить меру вращения частицы жидкости, не только исходя из обычного в механике понятия об угловой скорости, но также исходя из понятия о циркуляции скорости по замкнутому контуру.

Соотношение (4.78) между циркуляцией скорости по замкнутому контуру и интенсивностью вихря, охватываемого контуром, может быть обобщено на случай контура конечных размеров.

Пусть  $L$  есть произвольный замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность  $S$ . Предположим, что поверхность  $S$  ограничена только контуром  $L$ , т. е. что внутри контура  $L$  нет других контуров, ограничивающих поверхность  $S$ , как, например, в случае поверхности, изображенной на рис. 4.58. Предположим, говоря проще,

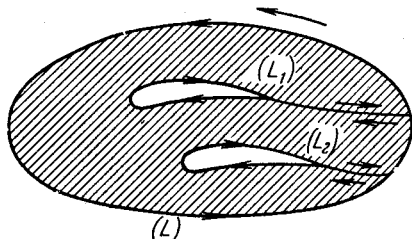


Рис. 4.58. Пример трехсвязной области на плоскости. Разрезы преобразуют область в односвязную.

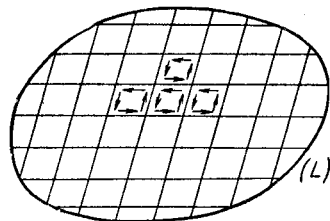


Рис. 4.59. К доказательству теоремы Стокса о циркуляции скорости по замкнутому контуру.

что внутри области, ограничиваемой контуром  $L$ , нет «дыр». Такая область называется односвязной, в отличие от двухсвязной при двух контурах, которые ее ограничивают (наружном и внутреннем), трехсвязной — при трех контурах (рис. 4.58) и т. д.<sup>1)</sup> Если, например, контур  $L$  охватывает крыло бесконечно большого размаха, то область, ограниченная этим контуром, будет двухсвязной, так как здесь контур профиля крыла является вторым, внутренним контуром. Итак, пусть контур  $L$  ограничивает односвязную область, как это показано на рис. 4.59. Проведем вспомогательные линии так, чтобы разделить эту область на элементарные площадки. Для каждой ( $i$ -й) площадки, согласно равенству (4.78):

$$d\Gamma_{ni} = 2\omega_{ni}d\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Просуммируем эти равенства по всем  $m$  площадкам:

$$\sum_{i=1}^{i=m} d\Gamma_{ni} = 2 \sum_{i=1}^{i=m} \omega_{ni}d\sigma_i.$$

<sup>1)</sup> Математически односвязная область на поверхности  $S$  определяется как такая, что любой замкнутый контур может быть стянут в точку непрерывной деформацией, при которой он все время остается на поверхности  $S$ . Нетрудно видеть, что это определение выражает ту же мысль, которая приведена в тексте, ибо если в поверхности  $S$  имеется «дыра» (внутренний контур), то контур, охватывающий эту «дыру», никакой непрерывной деформацией не может быть стянут в точку.

Нетрудно видеть, что сумма в левой части представляет собой циркуляцию скорости  $\Gamma$  по контуру  $L$ . В самом деле, каждый из элементарных контуров, образованных вспомогательными линиями, будет при суммировании пройден дважды в обратных друг другу направлениях, ибо всякий участок такого контура принадлежит двум соседним площадкам. Следовательно, произведения  $v_s ds$  для всех вспомогательных линий взаимно сократятся. Останутся в левой части после сокращения лишь произведения  $v_s ds$ , относящиеся к элементам контура  $L$ , а они в сумме как раз и дадут, по определению, циркуляцию скорости по этому контуру. Таким образом, при любом раз- делении области на элементарные площадки циркуляция скорости по контуру  $L$  равна

$$\Gamma = 2 \sum_{i=1}^{i=m} \omega_{ni} d\sigma_i.$$

В пределе, при увеличении числа элементарных площадок до бесконечности ( $m \rightarrow \infty$ ) и одновременном уменьшении всех  $d\sigma_i$  до нуля, средние значения  $\omega_{ni}$  будут равны значениям этой величины в соответствующих точках, а сумма в правой части будет равна  $\int_{(S)} \omega_n dS$ .

Левая часть при этом переходе к пределу, по доказанному, не изменяется. В результате получаем следующее выражение для циркуляции скорости по замкнутому контуру конечных размеров:

$$\Gamma = 2 \int_{(S)} \omega_n dS. \quad (4.79)$$

*Циркуляция скорости по замкнутому односвязному контуру  $L$  равна удвоенному интегралу от интенсивностей вихрей, проходящих сквозь незамкнутую поверхность, ограниченную контуром* (теорема Стокса, 1854).

Если вместо  $\Gamma$  подставить его выражение через контурный интеграл (по формуле (4.77)), то из последнего соотношения получим общую формулу, выражающую контурный интеграл по контуру  $L$  через двойной, взятый по поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ :

$$\oint_{(L)} v_s ds = 2 \oint_{(S)} \omega_n dS. \quad (4.80)$$

Теорему Стокса, выражаемую равенством (4.79) или (4.80), можно распространить и на случай многосвязной области. Для этого нужно соединить вспомогательными линиями (разрезами) наружный контур с внутренними так, чтобы получилась односвязная область.

Двойной интеграл в правой части распространяется в этом случае на заштрихованную область (рис. 4.58), а контурный интеграл берется

не только по наружному контуру  $L$ , но также вдоль разрезов и по всем внутренним контурам. При этом за положительное направление обхода по всем контурам принимается такое, когда при обходе заштрихованная область остается по левую сторону.

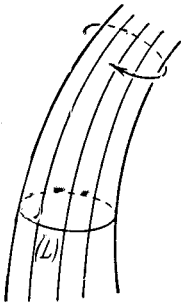


Рис. 4.60. Замкнутый контур  $L$  охватывает вихревую трубку.

Так как разрезы при вычислении циркуляции проходятся дважды в противоположных направлениях, то интегралы, взятые вдоль разрезов, взаимно сократятся и останутся лишь циркуляции скорости  $\Gamma_{L1}$  и  $\Gamma_{L2}$  по внутренним контурам. В результате применения теоремы Стокса получим:

$$\Gamma_L - \Gamma_{L1} - \Gamma_{L2} = 2 \int_{(S)} \omega_n dS.$$

Величины  $\Gamma_{L1}$  и  $\Gamma_{L2}$  входят в последнее равенство со знаком минус потому, что положительное направление обхода по каждому внутреннему контуру (когда находящаяся внутри него область остается по левую сторону) противоположно положительному направлению обхода по этому контуру, когда он присоединен с помощью разреза к наружному контуру. Из последнего равенства следует, что для трехсвязной области

$$\Gamma_L = 2 \int_{(S)} \omega_n dS + \Gamma_{L1} + \Gamma_{L2};$$

вообще при наличии  $n$  внутренних контуров циркуляция скорости по наружному контуру равна

$$\Gamma_L = 2 \int_{(S)} \omega_n dS + \sum_{i=1}^{i=n} \Gamma_{Li}.$$

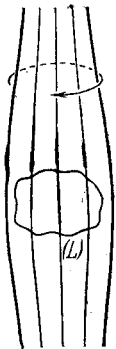


Рис. 4.61. Замкнутый контур  $L$  лежит на поверхности вихревой трубки, но ее не охватывает.

Отметим два важных следствия из теоремы Стокса. Если на поверхности вихревой трубки провести замкнутый контур, охватывающий вихревую трубку<sup>1)</sup> (рис. 4.60), то циркуляция скорости по такому контуру равна удвоенной интенсивности вихревой трубки. Если на поверхности вихревой трубки провести замкнутый контур  $L$ , не охватывающий трубку (рис. 4.61), то циркуляция скорости по такому контуру равна нулю. В самом деле, во всех точках поверхности вихревой трубки, по ее определению, вектор угловой скорости частицы направлен по касательной к поверхности и, следовательно, составляющая этого вектора по нормали к поверхности  $\omega_n = 0$ . В этом случае по теореме Стокса должна равняться нулю и циркуляция скорости.

Этим следствием из теоремы Стокса можно воспользоваться для того, чтобы заново доказать первую теорему Гельмгольца о вихрях

<sup>1)</sup> То есть такой, который не может быть стянут в точку без того, чтобы не перерезать вихревую трубку.

(иным способом, нежели это было сделано в предыдущем параграфе). Возьмем на поверхности вихревой трубки контур, изображенный на рис. 4.62. Этот контур состоит из двух разомкнутых колец  $I$  и  $2$  и двух соединительных линий  $3$  и  $4$ . Область, ограниченная этим контуром, по форме представляет собой как бы манжету, надетую на вихревую трубку. Контур манжеты всеми своими точками лежит на поверхности вихревой трубки, но не охватывает ее. Следовательно, циркуляция скорости по этому контуру равна нулю. Обозначив циркуляцию скорости по каждому из колец соответственно через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а циркуляцию скорости (точнее,  $\int \vec{v}_s ds$ ) по каждой из соединительных линий соответственно через  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ , сможем написать:

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 - \Gamma_4 = 0.$$

Знак минус у последних двух слагаемых поставлен потому, что при обходе по контуру манжеты в положительном направлении (по стрелкам) линии  $2$  и  $4$  проходятся в направлении, противоположном направлениям, в которых проходятся линии  $1$  и  $3$ . Если теперь перейти к пределу, неограниченно приближая точку  $A$  к точке  $B$  и точку  $C$  к точке  $D$ , то линии  $3$  и  $4$  совпадут и мы получим:

$$\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0.$$

Разомкнутые кольца  $1$  и  $2$  в пределе станут замкнутыми, и из предыдущего равенства будем иметь:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2,$$

что и доказывает первую теорему Гельмгольца о вихрях.

### § 23. Поле скоростей, вызываемое вихрями. Случай плоских вихрей

Если известно поле скоростей потока жидкости, то угловую скорость вращения частицы в любой точке можно вычислить по формулам (4.23), а зная угловые скорости, нетрудно определить и форму вихревых линий. Таким образом, определение вихрей по заданному полю линейных скоростей не представляет каких-либо затруднений.

Однако во многих вопросах аэродинамики и, в частности, в аэродинамике крыла и воздушного винта приходится встречаться с обратной задачей.

По результатам наблюдения или теоретическим соображениям оказывается возможным во многих случаях установить форму вихрей, которые появляются в потоке при обтекании данного тела. Вслед за

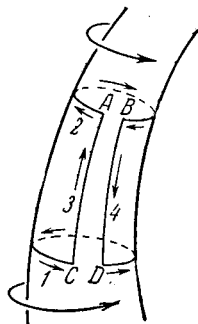


Рис. 4.62. К доказательству первой теоремы Гельмгольца о вихрях.