(иным способом, нежели это было сделано в предыдущем параграфе). Возьмем на поверхности вихревой трубки контур, изображенный на рис. 4.62. Этот контур состоит из двух разомкнутых колец *1* и *2* и двух соединительных линий *3* и *4*. Область, ограниченная этим контуром, по форме представляет собой как бы манжету, надетую на вихревую трубку. Контур манжеты всеми своими точками лежит на поверхности вихревой трубки, но не охватывает ее. Следовательно, циркуляция скорости по этому контуру равна нулю. Обозначив циркуляцию скорости по каждому из колец соответственно через Γ_1 и Γ_2, а циркуляцию скорости (точнее, $\int \bar{v}_s ds$) по каждой из соединительных линий соответственно через Γ_3 и Γ_4, сможем написать:

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 - \Gamma_4 = 0.$$

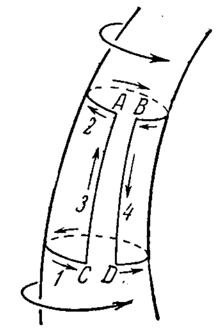

Рис. 4.62. К доказательству первой теоремы Гельмгольца о вихрях.

Знак минус у последних двух слагаемых поставлен потому, что при обходе по контуру манжеты в положительном направлении (по стрелкам) линии *2* и *4* проходятся в направлении, противоположном направлениям, в которых проходятся линии *1* и *3*. Если теперь перейти к пределу, неограниченно приближая точку A к точке B и точку C к точке D, то линии *3* и *4* совпадут и мы получим:

$$\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0.$$

Разомкнутые кольца *1* и *2* в пределе станут замкнутыми, и из предыдущего равенства будем иметь:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2,$$

что и доказывает первую теорему Гельмгольца о вихрях.

§ 23. Поле скоростей, вызываемое вихрями. Случай плоских вихрей

Если известно поле скоростей потока жидкости, то угловую скорость вращения частицы в любой точке можно вычислить по формулам (4.23), а зная угловые скорости, нетрудно определить и форму вихревых линий. Таким образом, определение вихрей по заданному полю линейных скоростей не представляет каких-либо затруднений.

Однако во многих вопросах аэродинамики и, в частности, в аэродинамике крыла и воздушного винта приходится встречаться с обратной задачей.

По результатам наблюдения или теоретическим соображениям оказывается возможным во многих случаях установить форму вихрей, которые появляются в потоке при обтекании данного тела. Вслед за этим возникает обычно вопрос об определении поля скоростей, вызываемого присутствием заданной системы вихрей в потоке.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря (за исключением случая, когда поток сверхзвуковой), вихрь вызывает скорости *во всех точках* пространства, занятого жидкостью, т. е. он приводит в движение всю окружающую его среду. Если в жидкости имеются и другие вихри, то в точках, находящихся на их осях, возникают скорости от действия первого вихря. В свою очередь эти другие вихри сообщают скорости частицам, находящимся на оси первого вихря. Вследствие этого вихревая система находится все время в движении, вызванном ее же вихрями.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда все вихревые линии, находящиеся в жидкости, прямолинейны и простираются до бесконечности в обе стороны, т. е. вызывают плоское движение. Для одного такого вихря, циркуляция вокруг которого равна Γ, поле скоростей определяется в полярной системе координат формулами

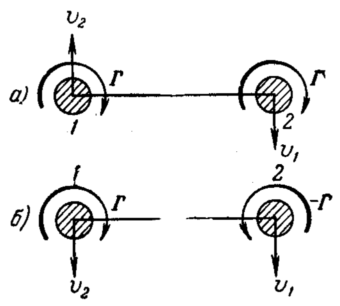

Рис. 4.63. Движение простейших вихревых систем.

$$v_s = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad v_r = 0,$$

или в прямоугольной системе координат, начало которой находится на оси вихря,

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

При наличии в потоке множества таких прямолинейных вихрей поле скоростей можно найти по методу наложения потоков, суммируя одноименные составляющие скорости от отдельных вихрей.

Представим себе, например, систему, состоящую из двух прямолинейных вихрей с интенсивностью, одинаковой по абсолютной величине и по знаку. Эти вихри сообщают друг другу равные по величине и противоположно направленные скорости, в результате чего система приходит во вращательное движение вокруг оси, проходящей через середину расстояния между центрами вихрей (рис. 4.63, *а*). Два вихря с интенсивностью, одинаковой по абсолютной величине, но противоположной по знаку, сообщают друг другу скорости, равные по величине и одинаковым образом направленные, в результате чего система движется прямолинейно и равномерно в направлении, перпендикулярном к прямой, соединяющей центры вихрей (рис. 4.63, *б*).

Рассмотрим произвольную плоскую вихревую систему, состоящую из отдельных вихрей, и найдем ее движение. Вихрь с циркуляцией Γ_i, центр которого в некоторый начальный момент времени находится в точке x_i, y_i, создает поле скоростей, определяемое формулами:

$$v_{xi} = -\frac{\Gamma_i}{2\pi}\frac{y-y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}, \qquad v_{yi} = \frac{\Gamma_i}{2\pi}\frac{x-x_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}.$$

Поле скоростей вихревой системы, состоящей из n плоских вихрей, получим, суммируя аналогичные выражения по всем n вихрям:

$$v_x = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2},$$

$$v_y = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}.$$

Вычислим скорость, которую имеет частица в центре k-го вихря от действия всех остальных вихрей системы. Для этого, очевидно, нужно в последних формулах положить $x=x_k$, $y=y_k$; тогда получим:

$$v_x^{(k)} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i \frac{y_k-y_i}{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2},$$

$$v_y^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i \frac{x_k-x_i}{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2}.$$

Само собой разумеется, что при суммировании слагаемое в этих формулах, которое соответствует значению $i=k$, должно быть пропущено, ибо плоский вихрь частицам, находящимся на его же оси, не сообщает никакой скорости; скорость в центре ядра вихря, как уже указывалось, равна нулю.

Последние формулы вследствие их симметрии позволяют весьма просто вычислить следующие выражения:

$$\Gamma_1 v_x^{(1)} + \Gamma_2 v_x^{(2)} + \Gamma_3 v_x^{(3)} + \ldots + \Gamma_n v_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_k v_x^{(k)},$$

$$\Gamma_1 v_y^{(1)} + \Gamma_2 v_y^{(2)} + \Gamma_3 v_y^{(3)} + \ldots + \Gamma_n v_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_k v_y^{(k)}.$$

В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_k v_x^{(k)} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i\Gamma_k \frac{y_k-y_i}{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_k v_y^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\Gamma_i\Gamma_k \frac{x_k-x_i}{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2}.$$

В правой части каждого из последних равенств имеется всегда четное число слагаемых, причем каждому слагаемому соответствует другое, равное ему по абсолютной величине, но противоположное по знаку. Они взаимно уничтожаются и, следовательно, правая часть каждого из последних равенств равна нулю. Мы получаем, таким образом, что

$$\Gamma_1 v_x^{(1)} + \Gamma_2 v_x^{(2)} + \Gamma_3 v_x^{(3)} + \ldots + \Gamma_n v_x^{(n)} = 0,$$

$$\Gamma_1 v_y^{(1)} + \Gamma_2 v_y^{(2)} + \Gamma_3 v_y^{(3)} + \ldots + \Gamma_n v_y^{(n)} = 0.$$

Последние равенства представляют собой основные уравнения движения системы плоских вихрей. Эти уравнения выражают закон, вполне аналогичный известному из механики закону сохранения количества движения системы при отсутствии внешних сил; роль масс в этом законе играют здесь циркуляции отдельных вихрей Γ_k [1]).

§ 24. Формула Био — Савара для скорости, вызываемой вихревой линией произвольной формы; применение ее к прямолинейному и круговому вихрям

До сих пор речь шла только о прямолинейных вихрях. Рассмотрим теперь более общий случай, когда в жидкости находится вихревая линия произвольной формы (рис. 4.64). Если выделить на этой линии элемент длиной ds и взять в жидкости, окружающей вихрь, точку M на расстоянии l от элемента ds, то можно доказать (вывод дан в следующем параграфе), что скорость, вызванная элементом вихря ds в точке M, по абсолютной величине равна

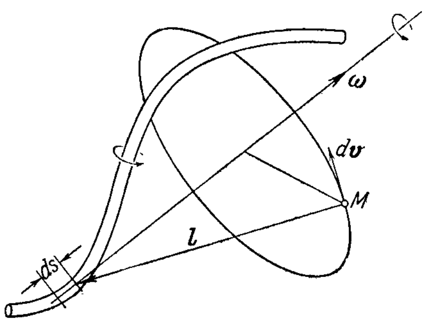

Рис. 4.64. Действие элемента вихря на частицу жидкости, находящуюся в точке M.

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin(\widehat{l, ds})\, ds}{l^2}, \qquad (4.81)$$

где Γ есть удвоенная интенсивность вихря.

Направление скорости $d\boldsymbol{v}$ перпендикулярно к плоскости, содержащей ds и радиус-вектор $\boldsymbol{l}$, проведенный из точки M в ds, т. е. совпадает с направлением векторного произведения векторов $\boldsymbol{l}$ и $d\boldsymbol{s}$. Поэтому в векторной записи формула для скорости, вызванной элементом вихря, будет иметь вид

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\boldsymbol{l} \times d\boldsymbol{s}}{l^3},$$

где $\boldsymbol{l} \times d\boldsymbol{s}$ есть векторное произведение векторов $\boldsymbol{l}$ и $d\boldsymbol{s}$. Таким образом, действие элемента вихря на частицу жидкости можно представить себе, вообразив, что частица жестко соединена с элементом и

---

[1]) Можно доказать также, что для произвольной системы плоских вихрей имеют место равенства

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k (x_k v_y^{(k)} - y_k v_x^{(k)}) = \text{const}, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2) = \text{const}.$$

Левая часть первого равенства аналогична выражению для суммы моментов количества движения масс Γ_k относительно оси z, левая часть второго равенства аналогична выражению для суммы моментов инерции тех же масс относительно оси z.