Последние равенства представляют собой основные уравнения движения системы плоских вихрей. Эти уравнения выражают закон, вполне аналогичный известному из механики закону сохранения количества движения системы при отсутствии внешних сил; роль масс в этом законе играют здесь циркуляции отдельных вихрей Γ_k [1]).

§ 24. Формула Био — Савара для скорости, вызываемой вихревой линией произвольной формы; применение ее к прямолинейному и круговому вихрям

До сих пор речь шла только о прямолинейных вихрях. Рассмотрим теперь более общий случай, когда в жидкости находится вихревая линия произвольной формы (рис. 4.64). Если выделить на этой линии элемент длиной ds и взять в жидкости, окружающей вихрь, точку M на расстоянии l от элемента ds, то можно доказать (вывод дан в следующем параграфе), что скорость, вызванная элементом вихря ds в точке M, по абсолютной величине равна

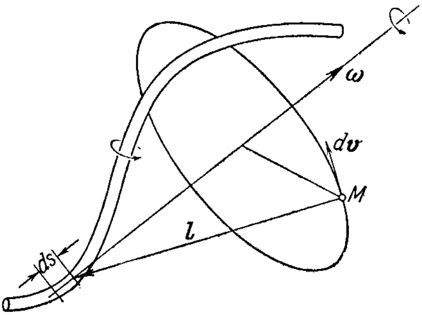

Рис. 4.64. Действие элемента вихря на частицу жидкости, находящуюся в точке M.

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin(\widehat{l, ds})\, ds}{l^2}, \qquad (4.81)$$

где Γ есть удвоенная интенсивность вихря.

Направление скорости $d\boldsymbol{v}$ перпендикулярно к плоскости, содержащей ds и радиус-вектор $\boldsymbol{l}$, проведенный из точки M в ds, т. е. совпадает с направлением векторного произведения векторов $\boldsymbol{l}$ и $d\boldsymbol{s}$. Поэтому в векторной записи формула для скорости, вызванной элементом вихря, будет иметь вид

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\boldsymbol{l} \times d\boldsymbol{s}}{l^3},$$

где $\boldsymbol{l} \times d\boldsymbol{s}$ есть векторное произведение векторов $\boldsymbol{l}$ и $d\boldsymbol{s}$. Таким образом, действие элемента вихря на частицу жидкости можно представить себе, вообразив, что частица жестко соединена с элементом и

---

[1]) Можно доказать также, что для произвольной системы плоских вихрей имеют место равенства

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k (x_k v_y^{(k)} - y_k v_x^{(k)}) = \text{const}, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2) = \text{const}.$$

Левая часть первого равенства аналогична выражению для суммы моментов количества движения масс Γ_k относительно оси z, левая часть второго равенства аналогична выражению для суммы моментов инерции тех же масс относительно оси z.

вращается вокруг оси, являющейся продолжением элемента вихря, со скоростью, определяемой формулой (4.81). Действие всей рассматриваемой вихревой линии на частицу определится при этом как геометрическая сумма действий ее отдельных элементов.

Последняя формула называется формулой Био — Савара, так как выражает закон, аналогичный известному из физики закону Био — Савара, определяющему действие элемента проводника, по которому течет электрический ток, на магнитный полюс единичной массы, находящийся в точке M. По этому закону сила, с которой действует элемент проводника на упомянутый магнитный полюс, пропорциональна силе тока, длине элемента проводника, синусу угла между элементом проводника и радиусом-вектором, соединяющим элемент с рассматриваемой точкой, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если вместо проводника, по которому течет электрический ток, иметь в виду в этом законе вихревую линию, силу тока заменить циркуляцией скорости вокруг этой вихревой линии, а силу воздействия на магнитный полюс, находящийся в точке M, — скоростью, которую вызывает элемент вихря в этой точке, то мы получим написанную выше формулу для $d\boldsymbol{v}$. В этом заключается, в применении к вихрям, так называемая *электромагнитная аналогия в аэродинамике*. Пользуясь этой аналогией, часто применяют в аэродинамике термины, принятые в электротехнике. Так, например, скорости, вызванные вихрями в окружающей среде, называют индуцированными скоростями.

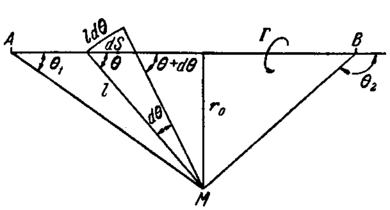

Рис. 4.65. К вычислению скорости, индуцируемой прямолинейным отрезком вихря.

Применим теперь формулу Био — Савара к отдельным частным случаям.

Возьмем *отрезок AB прямолинейного вихря* и вычислим скорость, индуцируемую им в точке M, находящейся на расстоянии r_0 от отрезка (рис. 4.65). Положение любой точки на отрезке однозначно определяется углом θ между отрезком и радиусом-вектором $\boldsymbol{l}$, проведенным в точку M. Выразим величины, входящие в формулу Био — Савара, через угол θ; в данном случае

$$\sin(\widehat{l, ds}) = \sin\theta, \qquad l = \frac{r_0}{\sin\theta}, \qquad ds = \frac{l\,d\theta}{\sin(\theta + d\theta)}$$

(если рассматривать ds как гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого одним из катетов является $l\,d\theta$). Последнее равенство можно заменить с точностью до малых величин более высокого порядка, нежели $d\theta$, следующим равенством:

$$ds = \frac{l\,d\theta}{\sin\theta} = \frac{r_0\,d\theta}{\sin^2\theta}.$$

Формула Био—Савара запишется теперь в виде

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{r_0}.$$

Так как векторы $d\boldsymbol{v}$, происходящие от различных элементов ds прямолинейного вихревого отрезка, имеют в точке M одно и то же направление, то суммировать их можно не геометрически, а алгебраически. Интегрируя последнее равенство по всей длине отрезка AB, т. е. по θ в промежутке (θ_1, θ_2), получим скорость, индуцируемую в точке M действием всего отрезка:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \tag{4.82}$$

В теории крыла приходится рассматривать прямолинейные вихри, которые берут свое начало у крыла и простираются вдоль потока до бесконечности. Пользуясь последней формулой, можно вычислить скорости, которые вызываются таким вихрем в плоскости, перпендикулярной к его оси и проходящей через его начальную точку. В этом случае $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$, и последняя формула дает:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r_0}. \tag{4.83}$$

Если оба конца прямолинейного вихря уходят в бесконечность (плоский вихрь), то в этом случае $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ и, следовательно,

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Скорость, которую создает в своей начальной плоскости вихрь, простирающийся до бесконечности в одну сторону, оказывается, таким образом, в два раза меньше, нежели скорость, создаваемая вихрем, простирающимся до бесконечности в обе стороны.

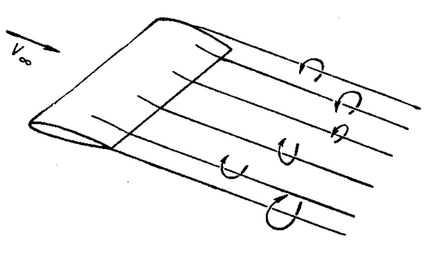

Рис. 4.66. От поверхности крыла отходят вихри, направленные вдоль потока.

Формулой (4.82) часто приходится пользоваться в теории крыла. Этой формулой определяется, в частности, скоростное взаимодействие вихрей крыла. На поверхности крыла берут свое начало вихревые линии, которые другим своим концом уходят в бесконечность. На одной половине крыла они вращаются в одну сторону, на другой — в другую (рис. 4.66). Из формулы (4.82) следует аналогично тому, как это было ранее показано (в § 23) для плоских вихрей, что каждый такой вихрь, который приближенно рассматриваем как прямолинейный, приводит в движение остальные вихри. Именно, вихри одинакового направления вращения закручиваются вокруг оси, проходящей через их общий «центр тяжести», вихри противоположного направления вращения движутся поступательно, перпендикулярно к прямой, соединяющей их оси. В результате вся вихревая система крыла на некотором расстоянии за ним сплетается в два противоположно вращающихся вихревых жгута, которые по мере удаления от крыла опускаются книзу (рис. 4.67).

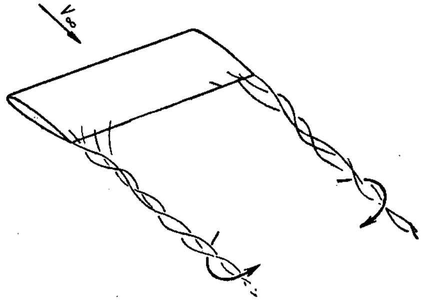

Рис. 4.67. Вихревая система крыла свертывается за крылом в два противоположно вращающихся вихревых жгута, которые опускаются книзу.

Рассмотрим теперь вихревое кольцо, т. е. вихревую линию, имеющую форму окружности.

Вихревые кольца можно весьма просто наблюдать на опыте, имея ящик, в котором одна стенка сделана упругой (например, затянута материей), а другая, ей противоположная, имеет круглое отверстие. Если слегка ударить по стенке, противоположной отверстию, то из отверстия вылетает вихревое кольцо, образующееся при обтекании воздухом кромки отверстия; это кольцо легко сделать видимым, наполнив предварительно ящик дымом.

Можно продемонстрировать относительно большую величину скорости, возникающей в центре вихревого кольца, по сравнению с собственной скоростью его движения, если на оси кольца поместить, например, горящую спичку. При прохождении вихревого кольца она обычно тухнет. Если удары следуют один за другим, то получается ряд колец и можно наблюдать их взаимодействие («игру» вихревых колец). Переднее из двух вихревых колец вследствие скоростей, индуцированных задним, увеличивается в диаметре и замедляется; заднее, наоборот, сужается и ускоряет свое поступательное движение (рис. 4.68). В результате заднее кольцо нагоняет переднее, проходит внутри него и становится передним. «Игра» продолжается до тех пор, пока вихревые кольца не размоются и не затухнут вследствие влияния вязкости окружающей среды.

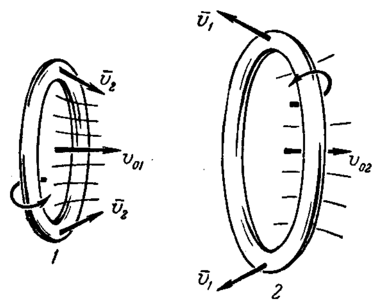

Рис. 4.68. «Игра» вихревых колец. Переднее кольцо индуцирует в точках заднего скорость v_2, а заднее кольцо — в точках переднего скорость v_1. В результате скорость центра v_{01} становится большей скорости центра v_{02}.

Вычислим скорости, индуцируемые вихревым кольцом в окружающей среде. Расположим начало координат в центре вихревого кольца, ось x направим перпендикулярно к плоскости, в которой оно находится. Обозначим координаты точки M, скорость в которой мы вычисляем, через x, y, z; координаты элемента ds вихревого кольца обозначим η, ζ (абсцисса ξ для всех его точек равна нулю). Проектируя на оси координат обе части формулы Био — Савара, получим:

$$dv_x = \frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_y d\zeta - l_z d\eta) = \frac{\Gamma}{4\pi l^3}[(z-\zeta)\,d\eta - (y-\eta)\,d\zeta],$$

$$dv_y = \frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_z d\xi - l_x d\zeta) = \frac{\Gamma}{4\pi l^3}\,x\,d\zeta,$$

$$dv_z = \frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_x d\eta - l_y d\xi) = -\frac{\Gamma}{4\pi l^3}\,x\,d\eta;$$

здесь

$$l=\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Для дальнейшего целесообразно перейти к цилиндрическим координатам. Обозначим через r и ϑ цилиндрические координаты точки M, через r_0 и θ радиус вихревого кольца и полярный угол элемента ds; тогда сможем написать:

$$y=r\cos\vartheta,\qquad z=r\sin\vartheta,\qquad \eta=r_0\cos\theta,\qquad \zeta=r_0\sin\theta;$$
$$d\eta=-r_0\sin\theta\,d\theta,\qquad d\zeta=r_0\cos\theta\,d\theta.$$

Формулы для компонентов скорости, индуцируемой вихревым кольцом, будут иметь вид

$$v_x=\frac{\Gamma r_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0-r\sin\vartheta\sin\theta-r\cos\vartheta\cos\theta}{l^3}\,d\theta,$$

$$v_y=\frac{\Gamma r_0 x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{l^3},\qquad v_z=\frac{\Gamma r_0 x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{l^3}.$$

Так как поток, возникающий от вихревого кольца, является симметрично-осевым, то, не умаляя общности последних формул, можно для упрощения положить в них $\vartheta=0$; тогда получим компоненты скорости от вихревого кольца v_x, v_r и v_ϑ в цилиндрической системе координат:

$$v_x=\frac{\Gamma r_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0-r\cos\theta}{l_0^3}\,d\theta,\qquad v_r=(v_y)_{\vartheta=0}=\frac{\Gamma r_0 x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{l_0^3}\,d\theta,$$

$$v_\vartheta=(v_z)_{\vartheta=0}=\frac{\Gamma r_0 x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{l_0^3}\,d\theta=0;$$

здесь

$$l_0=\sqrt{x^2+r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta}.$$

Симметрично-осевой поток характеризуется, как известно из предыдущего, функцией тока, которая в случае несжимаемой жидкости связана с компонентами скорости соотношениями

$$v_x=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для вычисления функции тока заметим, что

$$v_x=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^2\sin^2\theta-r_0(r-r_0\cos\theta)\cos\theta}{l_0^3}\,d\theta;$$

интегрируя первое слагаемое по частям, получим:

$$v_x=\frac{\Gamma r_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{l_0^2-r(r-r_0\cos\theta)}{rl_0^3}\cos\theta\,d\theta=\frac{\Gamma r_0}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{l_0}\right)\cos\theta\,d\theta.$$

Аналогично может быть представлено v_r:

$$v_r=-\frac{\Gamma r_0}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{l_0}\right)\cos\theta\,d\theta.$$

Так как

$$d\psi = rv_x dr - rv_r dx =$$

$$= \frac{\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{l_0}\right) dr + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{l_0}\right) dx \right] \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\left(\frac{r}{l_0}\right) \cos\theta \, d\theta = d\left[\frac{\Gamma r_0 r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{l_0} d\theta \right],$$

то функция тока для потока, индуцируемого вихревым кольцом, равна

$$\psi = \frac{r\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{l_0} d\theta.$$

§ 25. Определение в общем случае линейных скоростей по угловым скоростям вращения частиц

Рассмотрим общий случай пространственного вихревого движения и поставим задачу об определении поля линейных скоростей по заданному полю угловых скоростей вращения частиц.

Предположим, что компоненты угловой скорости вращения частицы ω_x, ω_y, ω_z заданы как функции координат и времени. Требуется найти компоненты линейной скорости, которые связаны с ω_x, ω_y, ω_z известными формулами

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Мы имеем здесь систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно v_x, v_y, v_z. Приведем эту систему путем исключения неизвестных к одному уравнению в частных производных. С этой целью введем в рассмотрение новое неизвестное — вспомогательный вектор $\boldsymbol{A}$, который по отношению к $\boldsymbol{v}$ играет ту же роль, что $\boldsymbol{v}$ по отношению к $\boldsymbol{\omega}$, т. е., иными словами, связан с $\boldsymbol{v}$ формулами

$$v_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right), \quad v_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

$$v_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Вектор $\boldsymbol{A}$ называется векторным потенциалом скорости $\boldsymbol{v}$.

Нетрудно видеть, что если, зная $\boldsymbol{\omega}$, мы сможем единственным образом определить соответствующий ему вектор $\boldsymbol{A}$, то тем самым на основании