Так как

$$d\psi = rv_x dr - rv_r dx =$$

$$= \frac{\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{l_0}\right) dr + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{l_0}\right) dx\right] \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\left(\frac{r}{l_0}\right) \cos\theta \, d\theta = d\left[\frac{\Gamma r_0 r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{l_0} d\theta\right],$$

то функция тока для потока, индуцируемого вихревым кольцом, равна

$$\psi = \frac{r\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{l_0} d\theta.$$

§ 25. Определение в общем случае линейных скоростей по угловым скоростям вращения частиц

Рассмотрим общий случай пространственного вихревого движения и поставим задачу об определении поля линейных скоростей по заданному полю угловых скоростей вращения частиц.

Предположим, что компоненты угловой скорости вращения частицы ω_x, ω_y, ω_z заданы как функции координат и времени. Требуется найти компоненты линейной скорости, которые связаны с ω_x, ω_y, ω_z известными формулами

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Мы имеем здесь систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно v_x, v_y, v_z. Приведем эту систему путем исключения неизвестных к одному уравнению в частных производных. С этой целью введем в рассмотрение новое неизвестное — вспомогательный вектор $\boldsymbol{A}$, который по отношению к $\boldsymbol{v}$ играет ту же роль, что $\boldsymbol{v}$ по отношению к $\boldsymbol{\omega}$, т. е., иными словами, связан с $\boldsymbol{v}$ формулами

$$v_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right), \quad v_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

$$v_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Вектор $\boldsymbol{A}$ называется векторным потенциалом скорости $\boldsymbol{v}$.

Нетрудно видеть, что если, зная $\boldsymbol{\omega}$, мы сможем единственным образом определить соответствующий ему вектор $\boldsymbol{A}$, то тем самым на основании последних формул будет решена и задача об определении вектора $\boldsymbol{v}$ по заданному $\boldsymbol{\omega}$ [1]).

Найдем соотношение между проекциями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{A}$; подставим с этой целью в формулы для компонент $\boldsymbol{\omega}$ вместо v_x, v_y, v_z их выражения через проекции $\boldsymbol{A}$. Формула для ω_x тогда примет вид

$$\omega_x = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z\,\partial x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right).$$

Подчиним теперь проекции вспомогательного вектора $\boldsymbol{A}$ дополнительному условию, чтобы они, так же как и проекции векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в несжимаемой жидкости, удовлетворяли условию неразрывности движения, т. е. чтобы

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Тогда между A_x и ω_x получается следующая зависимость:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -4\omega_x.$$

Заменяя здесь проекции векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на ось x другими одноименными проекциями, получаем аналогичные уравнения для A_y и A_z:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -4\omega_y,$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -4\omega_z.$$

Последние три уравнения независимы друг от друга и могут решаться каждое в отдельности. Эти уравнения были впервые введены Пуассоном (1812) в связи с теорией земного притяжения и называются уравнениями Пуассона.

Уравнение Пуассона можно рассматривать как обобщение уравнения Лапласа: если ω_x, ω_y, ω_z равны нулю, то из уравнений Пуассона получаются

---

[1]) В векторной записи связь между $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ выражается формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

Аналогично соотношение между $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{A}$ в векторной записи принимает вид

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Подставляя выражение $\boldsymbol{v}$ в формулу для $\boldsymbol{\omega}$, находим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ получается из $\boldsymbol{A}$ в результате двукратного применения операции rot:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}).$$

Так как $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$, то для определения вектора $\boldsymbol{A}$ получаем следующее уравнение:

$$\Delta\boldsymbol{A} = -4\boldsymbol{\omega}.$$

уравнения Лапласа. Таким образом, проекции вектора $\boldsymbol{A}$ вне вихревой области удовлетворяют уравнению Лапласа, а внутри вихревой области — уравнению Пуассона. Аналогичными свойствами обладает потенциал сил притяжения, и мы воспользуемся этим обстоятельством для того, чтобы найти вектор $\boldsymbol{A}$.

Представим себе, что в точке M (x, y, z) находится материальная частица с массой m. Эта частица создает в окружающем пространстве поле сил тяготения. Если в точке P (ξ, η, ζ) сосредоточена единица массы, то по закону всемирного тяготения на нее действует со стороны точки M сила, направленная от P к M и равная

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m}{l^3}\boldsymbol{l},$$

где $\boldsymbol{l}$ есть вектор, проведенный из точки M в точку P[1]).

Проекции $\boldsymbol{F}$ на оси координат соответственно равны:

$$F_x = \frac{m}{l^2}\,\frac{x-\xi}{l},$$

$$F_y = \frac{m}{l^2}\,\frac{y-\eta}{l},$$

$$F_z = \frac{m}{l^2}\,\frac{z-\zeta}{l}.$$

Сила тяготения $\boldsymbol{F}$ является потенциальным вектором, т. е. проекции этой силы на оси координат равны производным по координатам точки P от функции U, которая равна

$$U = \frac{m}{l}.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{-m}{l^2}\,\frac{\partial l}{\partial \xi} = \frac{m}{l^2}\,\frac{x-\xi}{l} = F_x,$$

и аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = F_y, \qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta} = F_z.$$

Нетрудно убедиться в том, что везде, кроме точки M, функция U удовлетворяет уравнению Лапласа (она представляет собою потенциал скоростей источника в пространстве).

Представим себе теперь, что некоторый объем V заполнен массой с переменной, вообще говоря, плотностью ρ и найдем потенциал этой массы. Для элемента объема $d\mathrm{V}$, масса которого равна $\rho\, d\mathrm{V}$, по формуле для потенциала материальной точки мы можем написать:

$$dU = \frac{\rho\, d\mathrm{V}}{l}.$$

Интегрируя по объему V, получим выражение для объемного потенциала

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \iiint\limits_{(\mathrm{V})} \frac{\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{l}. \tag{4.84}$$

Во всех точках, внешних по отношению к объему V, объемный потенциал, так же как и потенциал точки, удовлетворяет уравнению Лапласа. Рассмотрим теперь какую-либо внутреннюю точку объема V. Непосредственно

[1]) Множитель пропорциональности в последней формуле (константу притяжения) мы для сокращения письма опускаем.

к этой точке выражение (4.84) для потенциала неприменимо, ибо соответствующее этой точке значение l обращается в нуль. Выделим мысленно рассматриваемую точку из объема V с помощью сферы V_1 с центром в этой точке и малым радиусом ε. Тогда потенциал U, возникающий из объема V в центре сферы V_1, можно представить в виде суммы двух слагаемых: одного, происходящего от масс, лежащих вне сферы, другого — от масс, находящихся внутри нее:

$$U = \int\limits_{(V - V_1)} \frac{\rho\, dV}{l} + \int\limits_{(V_1)} \frac{\rho\, dV}{l}.$$

Докажем, что функция U для внутренних точек объема V удовлетворяет уравнению Пуассона. В самом деле, сумма вторых частных производных по координатам от первого слагаемого в выражении для U равна нулю, ибо рассматриваемая точка находится вне объема $V - V_1$. Для того чтобы вычислить сумму вторых частных производных от второго слагаемого, применим теорему Остроградского. По этой теореме можем написать:

$$\iiint\limits_{(V_1)} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_{(V_1)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= -\int\limits_{(S_1)} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -\int\limits_{(S_1)} F_n dS,$$

где S_1 есть поверхность сферы V_1.

Ввиду малости радиуса сферы V_1 ее можно считать однородной, т. е. плотность ρ в пределах сферы — величиной постоянной. Масса сферы тогда запишется в виде ρV_1. Силу притяжения F_n, возникающую от этой массы в точках поверхности сферы, можно вычислить так, как если бы масса сферы была сосредоточена в ее центре:

$$F_n = F = \frac{\rho V_1}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя найденное выражение для F_n в равенство, выражающее теорему Остроградского, и вынося средние значения подынтегральных величин за знак интеграла, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_{\text{ср}} V_1 = -\frac{\rho V_1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2.$$

Отсюда, после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем уравнение, которому удовлетворяет объемный потенциал во внутренней точке объема:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi\rho. \tag{4.85}$$

Это есть уравнение Пуассона, с которым мы уже встретились при определении скоростей, вызванных в потоке заданными вихрями. Но теперь, в результате изучения свойств потенциала притяжения, мы имеем решение этого уравнения в виде объемного потенциала, выражаемого интегралом (4.84).

Правые части в уравнениях Пуассона, которым удовлетворяют составляющие вектора $\boldsymbol{A}$, получаются из правой части уравнения (4.85) для объемного потенциала, если вместо ρ подставить соответственно ω_x/π, ω_y/π или

ω_z/π. Следовательно, решение этих уравнений получится из формулы (4.84) в результате такой же подстановки и замены x, y, z на ξ, η, ζ. Мы можем поэтому написать:

$$A_x = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_{(V)} \omega_x \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{l}, \quad A_y = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_{(V)} \omega_y \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{l},$$

$$A_z = \frac{1}{\pi}\iiint\limits_{(V)} \omega_z \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{l},$$

где интегрирование распространяется на весь объем V, в котором имеется вращение частиц. Можно доказать, что найденное таким образом решение является единственным.

Вычислим теперь компоненты скорости, возникающие от вихрей:

$$v_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_{(V)} \omega_z(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{l} - \frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{(V)} \omega_y(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \left[\omega_z(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{l}\right) - \omega_y(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{l}\right)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ [1]};$$

но, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{1}{l^2}\frac{\partial l}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{l^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{1}{l^2}\frac{\partial l}{\partial z} = -\frac{z-\zeta}{l^3},$$

то, вставляя полученные значения производных в выражение для v_x и производя аналогичные вычисления для v_y и v_z, получим:

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \left(\omega_y\frac{z-\zeta}{l^3} - \omega_z\frac{y-\eta}{l^3}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,\\
v_y &= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \left(\omega_z\frac{x-\xi}{l^3} - \omega_x\frac{z-\zeta}{l^3}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,\\
v_z &= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \left(\omega_x\frac{y-\eta}{l^3} - \omega_y\frac{x-\xi}{l^3}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.
\end{aligned}\right\} \quad (4.86)$$

Три последние формулы позволяют вычислить составляющие скорости при любом распределении угловых скоростей вращения частиц.

Продемонстрируем теперь на примерах применение этих формул.

Пример 1. Рассмотрим плоские вихри с осями, параллельными оси z, и площадью поперечного сечения вихревой области, равной σ. Полагая

---

[1]) Составляющие угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z относятся здесь к точке с координатами ξ, η, ζ, а величина l зависит, кроме того, от x, y, z, так как

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

в последних формулах $\omega_x = \omega_y = 0$ и $dV = d\sigma\, d\zeta$, получаем общие выражения для составляющих скорости в поле таких вихрей:

$$v_x = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \omega_z \frac{y-\eta}{l^3}\, d\sigma\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\sigma)} \omega_z (y-\eta)\, d\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{l^3},$$

$$v_y = \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{(V)} \omega_z \frac{x-\xi}{l^3}\, d\sigma\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\sigma)} \omega_z (x-\xi)\, d\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{l^3}.$$

Интегрирование по ζ в этих формулах может быть выполнено до конца; действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{l^3} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}};$$

последний же интеграл после замены переменных

$$\frac{z-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = \operatorname{ctg}\theta$$

переходит в следующий:

$$\frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cos\theta\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Таким образом, для произвольного плоского распределения угловых скоростей вращения частиц мы получаем:

$$v_x = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{(\sigma)} \omega_z \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\sigma,$$

$$v_y = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(\sigma)} \omega_z \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\sigma.$$

Если, в частности, рассматривать один плоский вихрь, для которого площадь ядра σ есть величина малая, то из последних формул получаются известные выражения компонент скорости плоского вихря. В самом деле, в этом случае, ввиду малости σ, можно считать ξ и η величинами постоянными. Следовательно,

$$v_x = -\frac{1}{\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\int\limits_{(\sigma)} \omega_z d\sigma = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

$$v_y = \frac{1}{\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\int\limits_{(\sigma)} \omega_z d\sigma = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

где по теореме Стокса удвоенная интенсивность вихрей заменена циркуляцией скорости:

$$\Gamma = 2\iint\limits_{(\sigma)} \omega_z\, d\xi\, d\eta.$$

Таким образом, мы вывели формулы для составляющих скорости в поле плоского вихря, которыми уже неоднократно пользовались в предыдущем.

Пример 2. Представим себе вихревую линию L произвольной формы и вычислим скорости, которые она вызывает в окружающей среде. Выделив элемент дуги этой линии ds, мы можем написать:

$$\omega_x = \omega \frac{d\xi}{ds}, \qquad \omega_y = \omega \frac{d\eta}{ds}, \qquad \omega_z = \omega \frac{d\zeta}{ds}.$$

Подставим эти выражения в общие формулы (4.86) для составляющих скорости, вызываемых вихрями, и заменим $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ произведением $d\sigma \cdot ds$; тогда получим:

$$v_x = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{(V)} \omega \left[\frac{d\eta}{ds} \frac{z-\zeta}{l^3} - \frac{d\zeta}{ds} \frac{y-\eta}{l^3}\right] d\sigma\, ds$$

и аналогичные выражения для других компонент скорости. Так как площадь поперечного сечения вихревой области σ есть величина малая, то выражение в квадратных скобках можно вынести за знак двойного интеграла, распространенного на σ, и одновременно заменить $\int\limits_{(\sigma)} \omega\, d\sigma$ через $\Gamma/2$. По первой теореме Гельмгольца о вихрях Γ есть величина постоянная по длине вихря; поэтому Γ можно вынести за знак криволинейного интеграла, распространенного по длине вихревой линии; таким образом, окончательно получаем:

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} \left[\frac{d\eta}{ds} \frac{z-\zeta}{l^3} - \frac{d\zeta}{ds} \frac{y-\eta}{l^3}\right] ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} [l_y d\zeta - l_z d\eta] \frac{1}{l^3};$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} \left[\frac{d\zeta}{ds} \frac{x-\xi}{l^3} - \frac{d\xi}{ds} \frac{z-\zeta}{l^3}\right] ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} [l_z d\xi - l_x d\zeta] \frac{1}{l^3},$$

$$v_z = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} \left[\frac{d\xi}{ds} \frac{y-\eta}{l^3} - \frac{d\eta}{ds} \frac{x-\xi}{l^3}\right] ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{(L)} [l_x d\eta - l_y d\xi] \frac{1}{l^3},$$

где через l_x, l_y, l_z обозначены проекции на оси координат вектора l, соединяющего произвольную точку среды с элементом ds вихревой линии.

Выражения в квадратных скобках в правых частях последних равенств представляют собой, очевидно, проекции на оси координат векторного произведения векторов l и ds. Следовательно, элемент вихря длиною ds вызывает в произвольной точке M окружающей среды скорость $d\boldsymbol{v}$, равную

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{l \times ds}{l^3}.$$

Мы вывели, таким образом, формулу Био — Савара, которая была приведена без доказательства в предыдущем параграфе.

Напомним, что формулы (4.86) определяют компоненты скорости лишь для несжимаемой жидкости. Кроме того, следует иметь в виду, что в каждом конкретном случае скорость потока должна удовлетворять граничным условиям задачи, например, на неподвижной поверхности тела в потоке должно быть $v_n = 0$. Поэтому, если по формулам (4.86) получаются скорости, не удовлетворяющие этим условиям, то необходимо на поток от вихрей наложить дополнительный поток, в котором $\omega = 0$, но такой, чтобы в результирующем потоке граничные условия удовлетворялись.