ГЛАВА V

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 1. Дифференциальная и интегральная формы уравнений динамики жидкости. Теорема Эйлера об изменении количества движения жидкого объема

Прежде чем заниматься динамикой идеальной жидкости, сделаем несколько замечаний, имеющих общий характер, т. е. относящихся в равной мере как к идеальной, так и ко всякой другой жидкости.

Применяя к жидкости общие законы механики, следует сначала мысленно выделить из жидкой среды некоторую ее часть и заменить действие окружающей среды на выделенную часть соответствующими силами. При решении разных задач аэродинамики удобно бывает по-разному выделять из жидкой среды тот объем, к которому применяются законы механики.

Представим себе, что нам нужно вычислить распределение скоростей в потоке или распределение давлений по поверхности тела, находящегося в потоке. Так как скорость и давление являются функциями координат точки, то уравнения должны быть построены так, чтобы из них можно было определять эти величины как функции координат. Естественно здесь выделить в жидкости элементарный объем, составить для него уравнения динамики и перейти затем в этих уравнениях к пределу, стягивая выделенный объем к некоторой внутренней его точке. Под словом «элементарный» мы имеем здесь в виду такой объем, что (независимо от его действительной величины) можно пренебрегать в его пределах изменением скорости или плотности, т. е. рассматривать его как материальную точку [1]).

В результате предельного перехода получатся дифференциальные уравнения, в которые входят в качестве неизвестных величин скорости, нормальные и касательные напряжения.

Изложенный способ составления уравнений динамики жидкости можно назвать способом дифференциальных объемов. Положительным его качеством является то, что он доставляет исчерпывающие сведе-

---

[1]) В теории пограничного слоя мы будем иметь примеры того, что выделяемый объем является весьма малым по своей протяженности, но изменением скоростей внутри него нельзя пренебречь. Такой объем не является элементарным в указанном выше смысле.

ния относительно искомых величин (скорости, давления и т. д.), если удается проинтегрировать дифференциальные уравнения. Но этот способ имеет также существенный недостаток, который заключается в том, что получающиеся здесь дифференциальные уравнения в частных производных обычно весьма трудны и далеко не всегда поддаются решению.

Другой недостаток способа дифференциальных объемов состоит в том, что искомые величины предполагаются непрерывными и даже дифференцируемыми. Однако на самом деле это далеко не всегда соответствует действительности. Так, например, при обтекании тел потоком газа с большой скоростью в некоторых местах потока происходит разрывное изменение скоростей и давлений (скачки уплотнения). К этим местам способ дифференциальных объемов, разумеется, неприменим.

Во многих вопросах аэродинамики вообще не встречается надобности в интегрировании дифференциальных уравнений движения жидкости. К числу этих вопросов относятся, например, вопросы о сопротивлении тела движению, о его подъемной силе, аэродинамическом моменте и т. д. Здесь требуется определить лишь суммарное силовое взаимодействие между средой и телом. Поэтому часто приходится в аэродинамике прибегать к другому способу, который дает не столь исчерпывающие сведения о движении жидкости, как первый, но позволяет сравнительно просто решать многие практические задачи, в частности, связанные с определением аэродинамических сил и моментов. Этот второй способ можно назвать, в противоположность первому, способом конечных объемов. Он заключается в том, что в жидкости мысленно выделяют некоторый конечный объем (т. е. такой объем, внутри которого нельзя пренебрегать изменением скорости или плотности) и ко всей массе жидкости, заключенной в этом объеме, применяют теоремы механики, относящиеся к системе материальных точек (например, теорему импульсов или теорему живых сил). Если в жидкости находится твердое тело и необходимо определить силу, действующую на него со стороны жидкости, то следует выделить объем таким образом, чтобы тело было внутри него. Тогда в уравнение, в число действующих на жидкость сил, войдет реакция тела (т. е. сила, равная по величине и противоположно направленная по отношению к силе воздействия жидкости на тело). Эта сила может быть непосредственно определена из уравнений, если известны скорости в среде, без промежуточного определения нормальных и касательных напряжений, что необходимо в первом способе.

Теоремы механики в способе конечных объемов записываются обычно в виде уравнений, содержащих интегралы, и скорость входит при этом под знак интеграла. Поэтому небольшие изменения скорости, в особенности тогда, когда в одной части области интегрирования они оказываются больше истинных, а в другой части — меньше истинных, не отражаются сколько-нибудь значительно на результате, Другим преимуществом этого способа по сравнению со способом дифференциальных объемов является то, что он применим и к областям разрыва скоростей, давлений и других величин.

Наиболее часто применяется в способе конечных объемов теорема об изменении количества движения (теорема импульсов). Поэтому остановимся на ней несколько подробнее. Эта теорема, как известно, заключается в том, что изменение количества движения какой-либо материальной системы равно импульсу приложенных к ней внешних сил. Так как выделенный в жидкости объем деформируется (разные частицы в нем имеют разные скорости) и, следовательно, конечная форма объема (по истечении промежутка времени dt) не совпадает с начальной, то возникает трудность при вычислении изменения количества движения: необходимо знать не только начальные и конечные скорости разных частиц, но и конечную форму выделенного объема. Однако если движение является установившимся, то, как было показано Эйлером, это вычисление значительно упрощается.

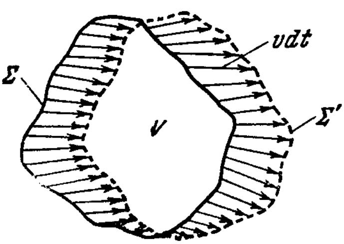

Рис. 5.1. Изменение формы объема V за время dt.

Выделим в жидкости произвольный объем V, ограниченный поверхностью Σ. Будем рассматривать V как жидкий объем, т. е. объем, состоящий во все время движения из одних и тех же частиц жидкости.

Ограничивающая этот объем поверхность Σ есть жидкая поверхность, она перемещается вместе с находящимися на ней частицами и в силу этого деформируется. За время dt, например, она переместится в положение Σ' (рис. 5.1), которое нетрудно построить, отложив от каждой точки поверхности Σ вектор, равный $\boldsymbol{v}\,dt$; концы этих векторов образуют поверхность Σ'. Изменение количества движения объема V происходит в общем случае от двух причин: во-первых, оттого, что каждая частица этого объема занимает с течением времени новое положение в пространстве и приобретает новую, присущую этому положению скорость; во-вторых, оттого, что в каждой точке пространства скорость изменяется с течением времени.

Но если движение является *установившимся,* как в рассматриваемом случае, то последняя причина отпадает. В *общей части* объемов, ограниченных Σ и Σ', скорость в каждой точке в начале промежутка dt та же, что и в конце его, и следовательно, в этой части никакого изменения количества движения не происходит. Остается подсчитать лишь изменение количества движения, которое произошло вследствие перемещения поверхности Σ в положении Σ'. Это можно сделать следующим образом. Возьмем на Σ площадку $d\Sigma$; оттого, что эта площадка перешла в положение $d\Sigma'$, объем V изменился на величину dV, что вызвало изменение количества движения на величину

$$\rho\, dV\boldsymbol{v} = \rho v_n\, dt\, d\Sigma \boldsymbol{v},$$

если объем dV рассматривать как элементарный цилиндр с основанием $d\Sigma$ и высотой $v_n dt$ (n здесь означает направление внешней нормали к поверхности Σ). Полное изменение количества движения объема V, которое мы обозначим через $d\boldsymbol{J}$, запишется в виде интеграла от последнего выражения, распространенного по всей поверхности Σ:

$$d\boldsymbol{J} = \iint\limits_{(\Sigma)} \rho v_n\, dt \boldsymbol{v}\, d\Sigma.$$

Этому двойному интегралу можно дать простое физическое истолкование, если представить себе, что, в отличие от предыдущего, поверхность Σ является *неподвижной*, а жидкость сквозь нее течет. Тогда $\rho v_n d\Sigma$ есть масса жидкости, протекающая в единицу времени сквозь площадку $d\Sigma$, а $\rho v_n \boldsymbol{v}\, d\Sigma$ — количество движения, которое за то же время вносится этой массой внутрь поверхности Σ или уносится наружу, смотря по знаку v_n. Выражение

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \rho v_n \boldsymbol{v}\, d\Sigma$$

представляет собой количество движения, переносимое средой в единицу времени сквозь неподвижную поверхность, ограничивающую объем V в начальный момент времени. Мы пришли, таким образом, к следующему общему результату: *изменение количества движения жидкого объема за какой-нибудь промежуток времени в случае установившегося потока равно количеству движения, переносимому жидкостью за то же время сквозь поверхность Σ, ограничивающую жидкий объем.* Иными словами, оно равно разности между количествами движения жидкости, втекающей внутрь Σ и вытекающей из нее. Этот результат называется теоремой Эйлера об изменении количества движения жидкого объема.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Свойство давлений в идеальной жидкости

Во многих задачах аэродинамики можно пренебрегать вязкостью жидкости, а следовательно, и касательными напряжениями. *Гипотетическая жидкость, которая не обладает вязкостью, называется идеальной жидкостью.* Она значительно более проста для исследования, нежели реальная жидкость, ибо природа нормальных и касательных напряжений, в которых проявляется вязкость, весьма сложна.