величину dV, что вызвало изменение количества движения на величину

$$\rho\, dV\boldsymbol{v} = \rho v_n\, dt\, d\Sigma \boldsymbol{v},$$

если объем dV рассматривать как элементарный цилиндр с основанием $d\Sigma$ и высотой $v_n dt$ (n здесь означает направление внешней нормали к поверхности Σ). Полное изменение количества движения объема V, которое мы обозначим через $d\boldsymbol{J}$, запишется в виде интеграла от последнего выражения, распространенного по всей поверхности Σ:

$$d\boldsymbol{J} = \iint\limits_{(\Sigma)} \rho v_n\, dt \boldsymbol{v}\, d\Sigma.$$

Этому двойному интегралу можно дать простое физическое истолкование, если представить себе, что, в отличие от предыдущего, поверхность Σ является *неподвижной*, а жидкость сквозь нее течет. Тогда $\rho v_n d\Sigma$ есть масса жидкости, протекающая в единицу времени сквозь площадку $d\Sigma$, а $\rho v_n \boldsymbol{v}\, d\Sigma$ — количество движения, которое за то же время вносится этой массой внутрь поверхности Σ или уносится наружу, смотря по знаку v_n. Выражение

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \rho v_n \boldsymbol{v}\, d\Sigma$$

представляет собой количество движения, переносимое средой в единицу времени сквозь неподвижную поверхность, ограничивающую объем V в начальный момент времени. Мы пришли, таким образом, к следующему общему результату: *изменение количества движения жидкого объема за какой-нибудь промежуток времени в случае установившегося потока равно количеству движения, переносимому жидкостью за то же время сквозь поверхность Σ, ограничивающую жидкий объем.* Иными словами, оно равно разности между количествами движения жидкости, втекающей внутрь Σ и вытекающей из нее. Этот результат называется теоремой Эйлера об изменении количества движения жидкого объема.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Свойство давлений в идеальной жидкости

Во многих задачах аэродинамики можно пренебрегать вязкостью жидкости, а следовательно, и касательными напряжениями. *Гипотетическая жидкость, которая не обладает вязкостью, называется идеальной жидкостью.* Она значительно более проста для исследования, нежели реальная жидкость, ибо природа нормальных и касательных напряжений, в которых проявляется вязкость, весьма сложна.

Уравнения движения идеальной жидкости мы составим здесь в дифференциальной форме, т. е. выделим в жидкости элемент (размеры которого будем устремлять затем к нулю) и приравняем произведение массы этого элемента на его ускорение результирующей действующих на него сил.

Возьмем прямоугольную систему координат и точку M_0 в жидкости в качестве исходной. Выделим обычным способом при точке M_0 жидкий элемент, который в соответствии с системой координат будет иметь форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.12).

Составим для этого элемента уравнения движения в проекциях на оси системы координат. Массу элемента можно выразить в виде $\rho_{ср}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, проекции ускорения — в виде dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt. Вычислим действующие на элемент силы. Если проекции объемной силы, отнесенной к единице массы, обозначить через X, Y, Z, то проекции объемной силы, действующей на элемент, будут равны $X\rho_{ср}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, $Y\rho_{ср}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, $Z\rho_{ср}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

Из поверхностных сил, которые заменяют собой в данном случае действие окружающей среды на выделенный элемент, нужно учитывать только нормальные силы (давления), ибо предполагается, что жидкость идеальна. При вычислении сил давления, действующих на отдельные грани параллелепипеда, мы будем считать давление на всей поверхности грани равным давлению на эту же грань в точке M_0. Нетрудно видеть, что учет изменения давления в пределах каждой грани привел бы в результате к дополнительным слагаемым более высокого порядка малости, нежели основные. Так как нормальные напряжения могут зависеть, вообще говоря, не только от координат точки и времени, но также и от ориентировки площадки, на которую они действуют, то мы введем обозначения: p_x — нормальное напряжение в точке M_0, действующее на площадку, перпендикулярную к оси x, p_y — напряжение в той же точке, действующее на площадку, перпендикулярную к оси y, и т. д.

Определим теперь проекции сил давления на оси координат. Проекция сил давления на ось x происходит от давлений, приложенных к левой и правой граням. Сила, действующая на левую грань, равна $p_x\,\Delta y\,\Delta z$, сила, действующая на правую грань, равна $-(p_x+\Delta p_x)\,\Delta y\,\Delta z$ (напомним, что нормальное напряжение считается положительным, когда оно направлено по внутренней нормали к поверхности элемента; при этом условии сила давления на правую грань будет направлена противоположно положительному направлению оси x). Результирующая сил давления, приложенных к левой и правой граням, равна $-\Delta p_x\,\Delta y\,\Delta z$. Аналогично находим проекции сил давления на оси y и z; результирующие сил давления, приложенных к левой и правой, верхней и нижней граням, будут соответственно равны $-\Delta p_y\,\Delta x\,\Delta z$ и $-\Delta p_z\,\Delta x\,\Delta y$.

Уравнения движения выделенного элемента запишутся теперь в следующем виде:

$$\rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \frac{dv_x}{dt} = X \rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z - \Delta p_x \, \Delta y \, \Delta z,$$

$$\rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \frac{dv_y}{dt} = Y \rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z - \Delta p_y \, \Delta z \, \Delta x,$$

$$\rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \frac{dv_z}{dt} = Z \rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z - \Delta p_z \, \Delta x \, \Delta y.$$

Разделим эти уравнения почленно на массу элемента $\rho_{\text{ср}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ и перейдем к пределу, устремляя $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (одновременно) к нулю, т. е. стягивая параллелепипед к исходной точке M_0. Тогда в пределе получим уравнения движения, в которых фигурируют лишь величины, относящиеся к точке M_0:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \tag{5. 1}$$

Здесь, однако, неизвестных функций имеется больше, нежели уравнений (неизвестными являются v_x, v_y, v_z, p_x, p_y, p_z, а в случае сжимаемой жидкости, кроме того, плотность ρ); поэтому мы перейдем к составлению дополнительных зависимостей. Оказывается, что в случае идеальной жидкости нормальные напряжения, действующие на разные площадки, проходящие через одну и ту же точку, связаны между собой очень простой зависимостью, такой же, как и в случае покоящейся жидкости (см. гл. I, § 5). Для того чтобы обнаружить эту зависимость, построим на ребрах Δx, Δy, Δz, исходящих из точки M_0, элемент, имеющий форму тетраэдра (рис. 1. 13), и напишем для него уравнения движения в проекциях на оси координат.

Составим уравнение движения тетраэдра в проекции на ось x; остальные уравнения можно затем написать по аналогии с этим. Масса тетраэдра равна $\rho_{\text{ср}} \Delta V$, где ΔV — его объем, проекция на ось x объемных сил равна $X \rho_{\text{ср}} \Delta V$, проекция на ту же ось сил давления равна

$$p_x \Delta S_x - p_n \Delta S_n \cos(\widehat{n, x}),$$

где ΔS_x и ΔS_n означают соответственно величины площадок $M_0 M_2 M_3$ и $M_1 M_2 M_3$. Таким образом, получаем следующее уравнение движения:

$$\rho_{\text{ср}} \Delta V \frac{dv_x}{dt} = X \rho_{\text{ср}} \Delta V + p_x \Delta S_x - p_n \Delta S_n \cos(\widehat{n, x}).$$

Так как $\Delta S_n \cos(\widehat{n, x}) = \Delta S_x$, то предыдущее уравнение примет вид

$$\rho_{\text{ср}} \Delta V \frac{dv_x}{dt} = X \rho_{\text{ср}} \Delta V + \Delta S_x (p_x - p_n).$$

Разделим это уравнение почленно на ΔS_x и перейдем к пределу, устремляя Δx, Δy, Δz к нулю. Тогда все слагаемые в этом уравнении, за исключением последнего, будут также стремиться к нулю, ибо содержат множитель $\Delta V / \Delta S_x$ (ΔV — здесь малая величина третьего порядка малости по сравнению с линейными размерами элемента, а ΔS_x — второго). Поэтому в пределе мы получим:

$$p_x - p_n = 0,$$

и, следовательно,

$$p_x = p_n.$$

Аналогично, рассматривая уравнения проекций на оси y и z, будем иметь:

$$p_y = p_n, \qquad p_z = p_n.$$

Так как площадки были при этом ориентированы произвольно, то отсюда вытекает следующее свойство давлений в идеальной жидкости. *Давление в любой точке потока идеальной жидкости одинаково для всех площадок, проходящих через эту точку,* т. е., иными словами, не зависит от ориентировки площадки, на которую оно действует. В силу этого свойства можно во многих вопросах рассматривать давление в идеальной жидкости как величину скалярную, зависящую только от координат точки и времени.

Так как нет теперь надобности различать между собой давления по разным площадкам, то мы будем опускать в дальнейшем значок при p, указывающий ориентировку площадки.

Вернемся теперь к уравнениям движения (5.1) и заменим в них p_x, p_y, p_z их общим значением p; тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Эти дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости называются *уравнениями Эйлера.* В векторной форме уравнения Эйлера можно написать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

где $\boldsymbol{G}$ есть вектор объемной силы, отнесенной к единице массы.

Неизвестными в этих уравнениях являются: компоненты скорости v_x, v_y, v_z, давление p, а в случае сжимаемой жидкости еще и плотность ρ. Отсюда видно, что уравнения (5.2) недостаточны для решения задач аэродинамики; к этим уравнениям необходимо присоединить уравнение неразрывности движения

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

и так называемое характеристическое уравнение, которое устанавливает зависимость между плотностью жидкости, давлением и температурой:

$$\rho=f(p, T).$$

Например, в случае совершенного газа характеристическим уравнением является уравнение

$$\rho=\frac{p}{RT}.$$

Здесь появляется новая неизвестная величина — абсолютная температура T. Она, так же как и другие неизвестные, является функцией координат и времени. Вообще говоря, она определяется притоком и отдачей тепла и способом передачи энергии внутри жидкости.

Для получения полной системы уравнений аэродинамики идеальной среды необходимо поэтому составить по крайней мере еще одно уравнение, которое называется уравнением переноса энергии [1]).

Однако мы не будем этим заниматься, так как в некоторых простейших случаях движения газа, которыми мы здесь ограничимся, плотность не зависит от температуры, а зависит только от давления, так что характеристическое уравнение принимает вид $\rho=f(p)$. Сюда относится движение, происходящее при постоянной температуре (изотермический процесс), для которого зависимость плотности от давления определяется формулой $\rho=\rho_0 p/p_0$. Сюда относится, далее, движение, происходящее без притока и отдачи тепла (адиабатический процесс), для которого зависимость плотности от давления выражается формулой $\rho=\rho_0(p/p_0)^{1/k}$, где $k=c_p/c_v$; вообще сюда относятся все так называемые политропические процессы, т. е. такие, для которых $\rho=\rho_0(p/p_0)^{1/n}$ при произвольном показателе n.

Если ограничиться случаем

$$\rho=f(p),$$

то мы имеем теперь для решения задач аэродинамики идеальной жидкости пять уравнений с пятью неизвестными.

В частном случае, когда жидкость несжимаема, количество неизвестных равно четырем, и полная система уравнений состоит из уравнений (5. 2) и уравнения неразрывности.

---

[1]) См. гл. VI.

При решении каждой конкретной задачи необходимо принимать во внимание, кроме уравнений, граничные и начальные условия данной задачи.

Начальные условия обычно заключаются в том, что задается состояние движения, т. е. поле скоростей и давлений в какой-либо определенный начальный момент времени $t=t_0$. Очевидно, что начальные условия имеют значение лишь при решении задач, относящихся к неустановившемуся движению. При решении задач, относящихся к установившемуся движению, они отсутствуют, так как в этом случае задание движения для одного какого-нибудь момента времени тем самым определило бы движение для всех моментов времени и отпала бы необходимость в решении задачи.

Граничные условия имеют определяющее значение во всех без исключения задачах аэродинамики. Они могут быть весьма разнообразными, и мы ограничимся поэтому лишь общими замечаниями.

Граничное условие для давлений состоит в том, что на некоторых поверхностях в жидкости задается величина давления. В частности, если жидкость имеет свободную поверхность раздела в атмосфере, то во всех точках свободной поверхности давление должно равняться атмосферному: $p=p_0$. Это последнее условие часто служит для определения формы свободной поверхности.

Граничное условие для скоростей вытекает из требования, чтобы между жидкостью и граничной поверхностью не образовалось при движении пустот, разрывов. Так как вдобавок мы представляем себе граничную поверхность непроницаемой для жидкости, то граничное условие для скоростей сводится к тому, что на своих границах идеальная жидкость может двигаться лишь по касательной к ограничивающим поверхностям (условие скольжения). Иными словами, в точках граничной поверхности нормальная составляющая скорости v_n должна равняться нормальной составляющей скорости самой поверхности u_n (мы представляем себе, что в общем случае граница жидкости движется и даже изменяет с течением времени свою форму; в качестве примера такой границы можно привести поверхность самолета, на котором во время его движения выполняются маневры рулями, или поверхность аэростата, газовый объем которого увеличивается по мере взлета).

Составим выражение для u_n. Пусть

$$F(x, y, z, t)=0$$

будет уравнение граничной поверхности. Компоненты скорости точки, находящейся на этой поверхности: u_x, u_y, u_z — определятся соответственно как производные dx/dt, dy/dt, dz/dt. Вычисляя полную производную по t от обеих частей уравнения поверхности, будем иметь:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

Отсюда после замены производных от координат соответствующими компонентами скорости получаем:

$$u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Выразим теперь u_n через компоненты u_x, u_y, u_z:

$$u_n = u_x \cos(\widehat{n, x}) + u_y \cos(\widehat{n, y}) + u_z \cos(\widehat{n, z});$$

подставляя вместо направляющих косинусов нормали к поверхности $F(x, y, z, t) = 0$ их выражения через производные от F, получим:

$$u_n = \left(u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Но вследствие предыдущего соотношения между компонентами скорости

$$u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial t},$$

и граничное условие $v_n = u_n$ запишется в виде

$$v_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

В частном случае, когда граничная поверхность неподвижна, u_x, u_y, u_z, а следовательно, и u_n равны нулю, и граничное условие для скорости на поверхности тела совпадает с тем, которое было сформулировано в кинематике для случая обтекания твердого тела потоком жидкости:

$$v_n = 0.$$

Кроме того, величина и направление скорости должны быть заданы на другой границе жидкости — на бесконечности. Если обозначить вектор скорости в бесконечном удалении от тела через V_∞, то это граничное условие запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{v} = V_\infty.$$

§ 3. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Ламба—Громеки

Прежде чем заниматься интегрированием уравнений движения идеальной жидкости (5.2), мы их несколько преобразуем с тем, чтобы придать им более удобный для интегрирования вид.

Рассмотрим сначала левые части уравнений (5.2). Проекции полного ускорения частицы $d\boldsymbol{v}/dt$ можно представить на основании