Отсюда после замены производных от координат соответствующими компонентами скорости получаем:

$$u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Выразим теперь u_n через компоненты u_x, u_y, u_z:

$$u_n = u_x \cos(\widehat{n, x}) + u_y \cos(\widehat{n, y}) + u_z \cos(\widehat{n, z});$$

подставляя вместо направляющих косинусов нормали к поверхности $F(x, y, z, t) = 0$ их выражения через производные от F, получим:

$$u_n = \left(u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Но вследствие предыдущего соотношения между компонентами скорости

$$u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial t},$$

и граничное условие $v_n = u_n$ запишется в виде

$$v_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

В частном случае, когда граничная поверхность неподвижна, u_x, u_y, u_z, а следовательно, и u_n равны нулю, и граничное условие для скорости на поверхности тела совпадает с тем, которое было сформулировано в кинематике для случая обтекания твердого тела потоком жидкости:

$$v_n = 0.$$

Кроме того, величина и направление скорости должны быть заданы на другой границе жидкости — на бесконечности. Если обозначить вектор скорости в бесконечном удалении от тела через V_∞, то это граничное условие запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{v} = V_\infty.$$

§ 3. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Ламба—Громеки

Прежде чем заниматься интегрированием уравнений движения идеальной жидкости (5.2), мы их несколько преобразуем с тем, чтобы придать им более удобный для интегрирования вид.

Рассмотрим сначала левые части уравнений (5.2). Проекции полного ускорения частицы $d\boldsymbol{v}/dt$ можно представить на основании равенства (3.15) в виде суммы ускорений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t},\\ \frac{dv_y}{dt}&=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t},\\ \frac{dv_z}{dt}&=v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.3)$$

Выясним смысл отдельных слагаемых в правой части этих равенств. Последнее слагаемое в каждом равенстве есть частная производная по времени; следовательно, по определению частной производной, она вычислена при постоянных значениях остальных переменных x, y, z. Такая производная изображает ускорение, которое мы наблюдали бы в фиксированной точке пространства (x, y, z — постоянные величины), следя за разными частицами, проходящими через эту точку. Это есть *ускорение в данном месте потока*; оно так и называется: *местное*, или *локальное, ускорение*. Происходит оно, очевидно, от нестационарности потока. Если бы поток был установившийся, то v_x, v_y, v_z не зависели бы от времени; следовательно, мы имели бы

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}=0,$$

и местное ускорение $\partial \mathbf{v}/\partial t$ было бы равно нулю.

Другая часть ускорения, изображаемая первыми тремя слагаемыми в правой части каждого из равенств (5.3), существует, вообще говоря, и при установившемся движении. Сумма этих трех слагаемых представляет собой ускорение, которое имела бы частица, если бы поток мгновенно стал установившимся (напомним, что при вычислении этих слагаемых t считается константой), а частица передвинулась бы *по линии тока* из исходного положения в соседнее. Это ускорение происходит, следовательно, оттого, что в разных точках потока в один и тот же момент времени имеются разные скорости; оно называется *конвективным ускорением* или *ускорением вдоль линии тока*.

Таким образом, *полное ускорение частицы жидкости в общем случае есть сумма местного ускорения и ускорения вдоль линии тока*.

Вернемся теперь к уравнениям (5.2) и подставим в них вместо проекций ускорения частицы их выражения (5.3) через частные производные. Кроме того, предположим, что объемные силы, действующие в жидкости, имеют потенциал. Обозначим через U потенциал объемных сил, т. е. функцию, определяемую следующими равенствами:

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x};\qquad Y=-\frac{\partial U}{\partial y};\qquad Z=-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Введя U в уравнения (5.2), получим:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t},\\
-\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t},\\
-\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\}\quad(5.4)$$

Предположим теперь, что плотность рассматриваемой среды зависит только от давления, но не зависит от температуры:

$$\rho=f(p).$$

Такая среда называется *баротропной средой*. Как уже указывалось в предыдущем параграфе, при всяком политропическом процессе среду можно считать баротропной.

Если среда баротропна, то $(dp)/\rho$ является функцией только от p. Обозначим в этом случае $\int(dp)/\rho$ через Π, или, что все равно, $(dp)/\rho$ через $d\Pi$. Функцию $\Pi(p)$ можно вычислить, если задано $\rho=f(p)$. Так, например, в случае несжимаемой среды $\Pi=p/\rho$, если среда сжимаема, но течение является адиабатическим, то $\rho=\rho_0(p/p_0)^{1/k}$ и $\Pi=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$ (с точностью до постоянного слагаемого). Из равенства

$$\frac{dp}{\rho}=d\Pi$$

следует:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial \Pi}{\partial x},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial \Pi}{\partial y},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Подставим эти выражения в уравнения (5.4) и заодно перепишем правые части уравнений (5.4) в несколько иной форме, добавив и отняв от них одни и те же количества. Все преобразования выполним только в первом уравнении (5.4); преобразования остальных уравнений совершенно аналогичны, и мы напишем эти уравнения в окончательном виде. К правой части первого уравнения прибавим $v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}$, и эту же величину отнимем; тогда получим:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial \Pi}{\partial x}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}+
+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Заметим, что сумма первых трех слагаемых в правой части равна

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(v_x^2)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial(v_y^2)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial(v_z^2)}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial x}.$$

Выражения же в скобках представляют собою удвоенные компоненты вихря (формулы (4.23)). Учтя все это, сможем переписать уравнения (5.4) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\left(v_z\omega_y-v_y\omega_z\right)+\frac{\partial v_x}{\partial t},\\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\left(v_x\omega_z-v_z\omega_x\right)+\frac{\partial v_y}{\partial t},\\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\left(v_y\omega_x-v_x\omega_y\right)+\frac{\partial v_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.5)$$

Эта форма уравнений движения идеальной жидкости называется уравнениями Ламба—Громеки.

Выражения в скобках в правых частях этих уравнений представляют собою, очевидно, проекции векторного произведения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$. Левые части являются проекциями вектора $-\operatorname{grad}(U+\Pi+v^2/2)$. Поэтому в векторной форме уравнения Ламба—Громеки можно написать следующим образом:

$$-\operatorname{grad}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}.$$

Отсюда видно, что при движении идеальной баротропной жидкости вектор $2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ есть потенциальный вектор, т. е. его проекции на оси координат являются производными по координатам от одной и той же потенциальной функции $\Phi=-(U+\Pi+v^2/2)$.

Для интегрирования и вообще для анализа движения уравнения Ламба—Громеки гораздо удобнее, нежели уравнения Эйлера, несмотря на то, что на первый взгляд они кажутся более громоздкими. Удобство этих уравнений заключается в том, что, в отличие от уравнений Эйлера, представляющих собой запись уравнений общей механики и, следовательно, не отражающих в явной форме особенности движения жидкости, эти уравнения содержат в явной форме ряд чисто гидродинамических величин: местные ускорения частиц, компоненты вихря и, наконец, механическую (внешнюю) энергию единицы массы жидкости, которая изображается трехчленом $U+\Pi+v^2/2$. Введение этих величин значительно облегчает формулировку тех упрощающих предположений, которые необходимы при интегрировании.

§ 4. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

Мы займемся теперь интегрированием уравнений движения идеальной жидкости, причем будем исходить из записи этих уравнений в форме Ламба—Громеки. До настоящего времени эти уравнения проинтегрированы лишь для некоторых частных случаев движения. Обычный путь интегрирования заключается в том, что ищется такая функция координат, производные которой по координатам равны соответствую-