Выражения же в скобках представляют собою удвоенные компоненты вихря (формулы (4.23)). Учтя все это, сможем переписать уравнения (5.4) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)&=2\left(v_z\omega_y-v_y\omega_z\right)+\frac{\partial v_x}{\partial t},\\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)&=2\left(v_x\omega_z-v_z\omega_x\right)+\frac{\partial v_y}{\partial t},\\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)&=2\left(v_y\omega_x-v_x\omega_y\right)+\frac{\partial v_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

Эта форма уравнений движения идеальной жидкости называется уравнениями Ламба—Громеки.

Выражения в скобках в правых частях этих уравнений представляют собою, очевидно, проекции векторного произведения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$. Левые части являются проекциями вектора $-\operatorname{grad}(U+\Pi+v^2/2)$. Поэтому в векторной форме уравнения Ламба—Громеки можно написать следующим образом:

$$-\operatorname{grad}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}.$$

Отсюда видно, что при движении идеальной баротропной жидкости вектор $2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ есть потенциальный вектор, т. е. его проекции на оси координат являются производными по координатам от одной и той же потенциальной функции $\Phi=-(U+\Pi+v^2/2)$.

Для интегрирования и вообще для анализа движения уравнения Ламба—Громеки гораздо удобнее, нежели уравнения Эйлера, несмотря на то, что на первый взгляд они кажутся более громоздкими. Удобство этих уравнений заключается в том, что, в отличие от уравнений Эйлера, представляющих собой запись уравнений общей механики и, следовательно, не отражающих в явной форме особенности движения жидкости, эти уравнения содержат в явной форме ряд чисто гидродинамических величин: местные ускорения частиц, компоненты вихря и, наконец, механическую (внешнюю) энергию единицы массы жидкости, которая изображается трехчленом $U+\Pi+v^2/2$. Введение этих величин значительно облегчает формулировку тех упрощающих предположений, которые необходимы при интегрировании.

§ 4. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

Мы займемся теперь интегрированием уравнений движения идеальной жидкости, причем будем исходить из записи этих уравнений в форме Ламба—Громеки. До настоящего времени эти уравнения проинтегрированы лишь для некоторых частных случаев движения. Обычный путь интегрирования заключается в том, что ищется такая функция координат, производные которой по координатам равны соответствующим правым частям уравнений (5.5). Если такая функция найдена, то уравнения (5.5) обращаются в равенства между производными по одноименным координатам от трехчлена $U+\Pi+v^2/2$ и от этой функции. Три равенства между производными по одноименным координатам свидетельствуют о том, что функции равны между собой или отличаются на слагаемое, не зависящее от координат. Таким образом, получается интеграл дифференциальных уравнений движения. Мы проиллюстрируем этот способ на отдельных, частных случаях движения.

1. *Интегралы Лагранжа и Эйлера.* Рассмотрим случай потенциального движения. Оно может быть в остальном какое угодно: установившееся или неустановившееся. Пусть φ будет потенциал скоростей этого движения. Тогда, как известно из кинематики жидкости,

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);$$

уравнения (5.5) в этом случае принимают вид:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Такой функцией, о которой шла речь в начале этого параграфа, является здесь $\partial\varphi/\partial t$; ее производные по координатам дают соответствующие правые части уравнений (5.5). Переходим теперь от равенства между производными к соотношению между функциями:

$$-\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+C(t),\tag{5.6}$$

где $C(t)$ есть слагаемое, *не зависящее от координат* (но, вообще говоря, зависящее от времени).

Мы получили, таким образом, интеграл уравнений движения идеальной баротропной среды для случая потенциального течения. Это уравнение называется интегралом (или уравнением) Лагранжа (1781).

Левая часть этого уравнения, как уже выяснялось в предыдущем параграфе, представляет собой величину энергии единицы массы среды при установившемся течении. Мы увидим в дальнейшем, что $\partial\varphi/\partial t$ также выражает энергию единицы массы, происходящую оттого, что давление в данной точке пространства при неустановившемся движении изменяется с течением времени. Таким образом, выражение $U+\Pi+v^2/2+\partial\varphi/\partial t$ представляет собою полную энергию единицы массы.

Из уравнения Лагранжа следует, что при потенциальном течении полная энергия единицы массы не зависит от координат, т. е. в данный момент времени есть величина постоянная для всех точек в потоке. Изменения полной энергии, имеющие место при неустановившемся потенциальном движении, происходят одновременно и одинаковым образом во всех точках потока.

Функцию $C(t)$ можно исключить из уравнения Лагранжа, написав его для двух любых точек в потоке, взятых при одном и том же фиксированном моменте времени:

$$U_1+\Pi_1+\frac{v_1^2}{2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1=U_2+\Pi_2+\frac{v_2^2}{2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2;$$

значки 1 и 2 указывают здесь номера точек, к которым относятся соответствующие величины. Последнее равенство можно еще иначе написать так:

$$\left(U_2+\Pi_2+\frac{v_2^2}{2}\right)-\left(U_1+\Pi_1+\frac{v_1^2}{2}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2.$$

Из кинематики жидкости известно, что потенциал скоростей равен

$$\varphi=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} v_s ds,$$

где x_0, y_0 — координаты фиксированной, а x, y — координаты переменной точек. Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}\frac{\partial v_s}{\partial t}ds$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2=-\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)}\frac{\partial v_s}{\partial t}ds.$$

Правая часть последнего равенства имеет простой механический смысл. Величина $\partial v_s/\partial t$ представляет собой проекцию на направление s местного ускорения, $-\partial v_s/\partial t$ — проекцию инерционной силы, соответствующей местному ускорению и отнесенной к единице массы жидкости, а $-\frac{\partial v_s}{\partial t}ds$ — работу этой инерционной силы на протяжении отрезка ds. Правая же часть последнего равенства представляет собой удельную работу инерционной силы, соответствующей местному ускорению, на всем пути между точками 1 и 2 в потоке. Так как рассматриваемое движение потенциально, то эта работа не зависит от формы пути.

Механический смысл уравнения Лагранжа можно теперь выразить следующим образом. При неустановившемся потенциальном движении идеальной жидкости разность трехчленов $U+\Pi+v^2/2$ для любых двух точек потока в данный момент времени равна удельной работе инерционных сил, соответствующих местному ускорению, на любом пути, проведенном между этими точками.

Большое значение имеет один частный случай уравнения Лагранжа, именно случай потенциального, и вдобавок *установившегося* движения. В этом случае потенциал скоростей и величина полной энергии единицы массы не зависят от времени; следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \qquad C(t)=\text{const},$$

и мы получаем:

$$U+\Pi+\frac{v^2}{2}=\text{const (для всех точек в потоке).} \tag{5.7}$$

Этот частный случай уравнения Лагранжа называется уравнением Эйлера (1755). Он выражает тот факт, что *при потенциальном, установившемся движении идеальной баротропной среды полная энергия единицы массы есть величина постоянная для всех точек в потоке.*

Если жидкость несжимаема, а объемные силы сводятся к силе тяжести, то, направив ось z вертикально вверх, будем иметь $U=gz$, и интеграл Лагранжа тогда примет вид

$$p+\frac{\rho v^2}{2}+\gamma z+\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=C_1(t),$$

где

$$C_1(t)=\rho C(t).$$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$p+\frac{\rho v^2}{2}+\gamma z=\text{const (для всех точек в потоке).}$$

Если среда сжимаема, но тепловой процесс в ней является адиабатическим, то, подставляя в уравнения (5.6) и (5.7) вместо Π величину $\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$, получим уравнение Лагранжа для этого случая

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=C(t)$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz=\text{const (для всех точек в потоке).}$$

Следует отчетливо уяснить себе, в чем состоит отличие уравнения Эйлера от уравнения Бернулли. Уравнение Бернулли было выведено во второй главе для любого установившегося движения жидкости; мы не предполагали при этом выводе, что поток должен быть потенциальным. Следовательно, предположения при выводе уравнения Бернулли были значительно более общие, нежели в данном случае при выводе уравнения Эйлера.

Но зато при менее общих предположениях последнего уравнения мы получили более содержательный результат. Полная энергия единицы массы в этом случае одинакова для *всех точек* в потоке, тогда как в общем случае вихревого движения уравнение Бернулли устанавливает, что она одинакова лишь *для точек, находящихся на одной линии тока*; для разных же линий тока она будет в общем случае иметь разную величину.

То обстоятельство, что при потенциальном движении полная энергия единицы массы есть величина, постоянная для всего потока, делает возможным решение многих новых задач, так как оно позволяет брать *любые две точки* для записи уравнения (5.7), в том числе и такие точки, которые не лежат на одной линии тока.

2. *Уравнение Громеки.* Перейдем теперь к интегрированию уравнений (5.5) для некоторых случаев вихревого (непотенциального) движения. При этом будем предполагать, что движение во всех случаях установившееся, т. е. $\partial v_x/\partial t = \partial v_y/\partial t = \partial v_z/\partial t = 0$.

Следовательно, исходные уравнения (5.5) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(U + \Pi + \frac{v^2}{2}\right) &= 2(\omega_y v_z - v_y \omega_z), \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(U + \Pi + \frac{v^2}{2}\right) &= 2(\omega_z v_x - v_z \omega_x), \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(U + \Pi + \frac{v^2}{2}\right) &= 2(\omega_x v_y - v_x \omega_y). \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Рассмотрим случай, когда функция, о которой шла речь в начале этого параграфа, равна нулю, т. е. когда равны нулю правые части этих уравнений. Нетрудно видеть, что с физической точки зрения это такие случаи, когда полная энергия единицы массы жидкости не зависит от координат, т. е. одна и та же *для всех точек в потоке*. Эти случаи не исчерпываются только что рассмотренными. Если оставить в стороне случай покоя жидкости: $v_x = v_y = v_z = 0$, когда последние уравнения сводятся к уравнениям гидростатики, и только что рассмотренный случай потенциального, установившегося движения: $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, то имеется еще один частный случай, когда правые части последних уравнений обращаются в нуль. Это случай, когда $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{v}$, т. е.

$$\omega_y v_z = \omega_z v_y, \qquad \omega_z v_x = \omega_x v_z, \qquad \omega_x v_y = \omega_y v_x,$$

или, что равносильно:

$$\frac{v_x}{\omega_x}=\frac{v_y}{\omega_y}=\frac{v_z}{\omega_z}. \tag{5.9}$$

В этом случае частные производные по координатам от трехчлена $U+\Pi+\frac{v^2}{2}$ равны нулю и, следовательно,

$$U+\Pi+\frac{v^2}{2}=\text{const (для всех точек области, где } \boldsymbol{\omega}\parallel\boldsymbol{v}). \tag{5.10}$$

Это уравнение мы будем называть уравнением Громеки, так как Громека впервые вывел его в 1881 г. [1]). Несмотря на то, что по форме уравнение Громеки идентично с уравнением Эйлера, оно, по существу, отличается от уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера устанавливает постоянство полной энергии единицы массы жидкости в случае потенциального движения, тогда как уравнение Громеки устанавливает постоянство той же энергии и *в случае вихревого движения*, если только выполняются условия (5.9). Эти условия определяют очень интересное и важное движение жидкости. Пропорциональность между соответствующими компонентами вектора линейной и вектора угловой скорости означает, что эти векторы составляют с осями координат соответственно равные углы и что, следовательно, направления их совпадают между собой. Так как, вдобавок, оба эти вектора исходят из одной и той же точки, то можно сказать, что каждая частица в этом движении вращается вокруг оси, вдоль которой она движется. Каждая частица находится, таким образом, в состоянии *винтового движения*. Из того, что в каждой точке потока совпадают направления векторов линейной и угловой скорости, следует, что их огибающие также совпадают между собой. Иными словами, равенства (5.9) определяют движение жидкости, в котором *совпадают линии тока и вихревые линии*.

Такое движение имеет место, например, при обтекании крыла вблизи его торцов. Здесь возникает местное движение жидкости, вызванное разностью давлений между областями потока, находящимися непосредственно под крылом и над ним. Возникший при обтекании торца крыла вихрь простирается, как это следует из теоремы Гельмгольца, до бесконечности, причем под действием набегающего на крыло потока ось этого вихря располагается вдоль линий тока (рис. 5.2). Оказывается, далее, что не только от торцов крыла, но и по всему его размаху отходят в бесконечность по потоку вихревые линии, вызванные влиянием торцов, и все они вблизи крыла совпадают по направлению с линиями тока. Уравнение Громеки позволяет применять к любым двум точкам этого потока теорему о

[1]) Громека И. С., Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, Казань, 1881.

постоянстве полной энергии единицы массы так, как если бы этот поток был безвихревым.

Винтовое движение жидкости имеет место и в ряде других случаев, например при обтекании вращающегося воздушного винта, при течении в открытых руслах, трубопроводах, при истечении из донного отверстия и т. д.[1]). Вообще следует отметить, что это наиболее общий случай установившегося движения идеальной баротропной среды, при котором энергия единицы массы есть величина постоянная во всем потоке; безвихревое движение можно рассматривать как частный случай винтового и уравнение Эйлера — как частный случай уравнения Громеки.

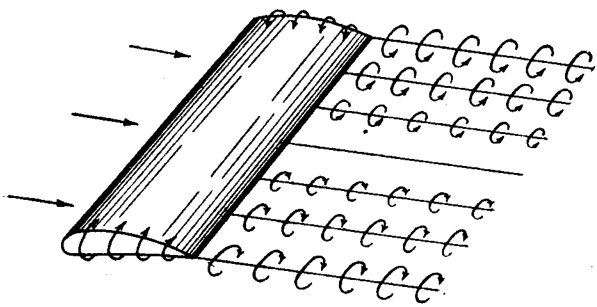

Рис. 5.2. При обтекании крыла вихревые линии совпадают с линиями тока.

3. *Уравнение постоянства энергии вдоль линий тока и вихревых линий.* Мы исчерпали теперь все случаи установившегося потока, в которых частные производные по координатам от трехчлена $U+\Pi+v^2/2$ обращаются в нуль. Поставим теперь аналогичный вопрос по отношению к полному дифференциалу этого трехчлена. Найдем такие направления в жидкости, при перемещении вдоль которых полный дифференциал $d(U+\Pi+v^2/2)$ равен нулю. Составим выражение для этого дифференциала: умножим первое из уравнений (5.8) почленно на dx, второе — на dy, третье — на dz и сложим эти уравнения. В результате получим:

$$-d\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\left[(\omega_y v_z-\omega_z v_y)\,dx+\right.$$
$$\left.+(\omega_z v_x-\omega_x v_z)\,dy+(\omega_x v_y-\omega_y v_x)\,dz\right].$$

Выражение в квадратных скобках можно представить в виде определителя третьего порядка, для которого двучлены в круглых

[1]) Более подробно о винтовом движении жидкости см. в книге: Васильев О. Ф., Основы механики винтовых и циркуляционных потоков, Госэнергоиздат, 1958.

скобках являются минорами:

$$-d\left(U+\Pi+\frac{v^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Из математики известно, что определитель обращается в нуль, если элементы одной какой-либо строчки или столбца пропорциональны соответствующим элементам другой строчки или столбца. Отсюда получаем следующие условия, при которых определитель обращается в нуль:

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z},$$

или

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}.$$

(Условие пропорциональности между элементами второй и третьей строчек представляет собой уравнения винтового движения (5.9); этот случай мы уже разобрали и не будем к нему возвращаться.) Первое из этих условий совпадает с дифференциальными уравнениями линий тока, второе — с дифференциальными уравнениями вихревых линий (гл. IV, формулы (4.5) и (4.74)). Эти условия показывают, что $d(U+\Pi+v^2/2)$ обращается в нуль лишь в том случае, если, исходя из данной точки, перемещаться вдоль линии тока или вдоль вихревой линии. Таким образом, мы получаем еще два интеграла основных уравнений аэродинамики:

$$U+\Pi+\frac{v^2}{2}=\text{const} \qquad (5.11)$$

для всех точек, находящихся на одной линии тока, и

$$U+\Pi+\frac{v^2}{2}=\text{const} \qquad (5.12)$$

для всех точек, находящихся на одной вихревой линии.

Первый из этих интегралов в случае несжимаемой жидкости представляет собой не что иное, как известное из гл. II уравнение Бернулли, устанавливающее постоянство энергии единицы массы вдоль каждой линии тока.

Последние два интеграла можно объединить и вместе с тем сформулировать в более общем виде. Возьмем какую-нибудь линию тока; во всех ее точках, по доказанному, полная энергия единицы массы есть величина постоянная. Через каждую точку линии проходит в общем случае вихревая линия; вдоль вихревой линии полная энергия единицы массы также сохраняется. Величина полной энергии в точках вихревой линии будет, очевидно, та же, что и в точках линии тока, ибо полная энергия единицы массы есть однозначная функция координат, и в точке пересечения линии тока и вихревой линии может иметь лишь одно какое-либо значение. Это относится ко всем вихревым линиям, пересекающим взятую линию тока, и наоборот, ко всем линиям тока, пересекающим взятую вихревую линию.

Мы заключаем отсюда, что *величина полной энергии единицы массы жидкости есть величина постоянная во всех точках каждой поверхности, образованной сеткой линий тока и вихревых линий.*

§ 5. Примеры применения уравнений движения идеальной жидкости и их интегралов

Пример 1. Вычислим распределение давлений в поле плоского вихря, удвоенная интенсивность которого пусть будет Г.

Следует заметить, что, несмотря на простоту этого примера, мы не могли бы его решить, располагая лишь теми средствами, которые известны из предыдущих глав. Уравнение Бернулли здесь не дает нужных результатов: это уравнение можно применять лишь к точкам одной и той же линии тока.

Здесь на помощь нам приходит интеграл Эйлера (5.7). Мы можем применить уравнение (5.7) к любым двум точкам поля вихря (т. е. пространства, внешнего к ядру), так как движение в этом поле потенциальное. Представим себе, что ось вихря вертикальна; это даст нам возможность исключить из рассмотрения действие сил тяжести. Уравнение (5.7) в этом случае принимает вид

$$\Pi + \frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

Предположим далее, что вихрь находится в спокойной среде, т. е. что в бесконечности $v = 0$; величину Π в бесконечности обозначим через Π_∞. Тогда для любой точки в поле вихря имеем:

$$\Pi + \frac{v^2}{2} = \Pi_\infty.$$

Так как в поле вихря $v = \Gamma/2\pi r$, то

$$\Pi - \Pi_\infty = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{5.13}$$

Рассмотрим сначала случай, когда среда несжимаема. Подставляя в этом случае в последнее равенство $\Pi = \frac{p}{\rho}$, $\Pi_\infty = \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$, получим:

$$p - p_\infty = -\frac{\rho_\infty \Gamma^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{5.14}$$

Давление в поле вихря, как видно из этой формулы, непрерывно убывает при приближении к оси вихря (обратно пропорционально квадрату расстояния до оси). Везде в поле вихря давление p меньше давления p_∞ в спокойной атмосфере, т. е в поле вихря имеет место подсасывание.

Отсюда следует, что всякое симметричное тело, находящееся в поле вихря, испытывает кроме силы лобового сопротивления, направленной по