в точках вихревой линии будет, очевидно, та же, что и в точках линии тока, ибо полная энергия единицы массы есть однозначная функция координат, и в точке пересечения линии тока и вихревой линии может иметь лишь одно какое-либо значение. Это относится ко всем вихревым линиям, пересекающим взятую линию тока, и наоборот, ко всем линиям тока, пересекающим взятую вихревую линию.

Мы заключаем отсюда, что *величина полной энергии единицы массы жидкости есть величина постоянная во всех точках каждой поверхности, образованной сеткой линий тока и вихревых линий.*

§ 5. Примеры применения уравнений движения идеальной жидкости и их интегралов

Пример 1. Вычислим распределение давлений в поле плоского вихря, удвоенная интенсивность которого пусть будет Γ.

Следует заметить, что, несмотря на простоту этого примера, мы не могли бы его решить, располагая лишь теми средствами, которые известны из предыдущих глав. Уравнение Бернулли здесь не дает нужных результатов: это уравнение можно применять лишь к точкам одной и той же линии тока.

Здесь на помощь нам приходит интеграл Эйлера (5.7). Мы можем применить уравнение (5.7) к любым двум точкам поля вихря (т. е. пространства, внешнего к ядру), так как движение в этом поле потенциальное. Представим себе, что ось вихря вертикальна; это даст нам возможность исключить из рассмотрения действие сил тяжести. Уравнение (5.7) в этом случае принимает вид

$$\Pi + \frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

Предположим далее, что вихрь находится в спокойной среде, т. е. что в бесконечности $v = 0$; величину Π в бесконечности обозначим через Π_∞. Тогда для любой точки в поле вихря имеем:

$$\Pi + \frac{v^2}{2} = \Pi_\infty.$$

Так как в поле вихря $v = \Gamma/2\pi r$, то

$$\Pi - \Pi_\infty = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{5.13}$$

Рассмотрим сначала случай, когда среда несжимаема. Подставляя в этом случае в последнее равенство $\Pi = \frac{p}{\rho}$, $\Pi_\infty = \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$, получим:

$$p - p_\infty = -\frac{\rho_\infty \Gamma^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{5.14}$$

Давление в поле вихря, как видно из этой формулы, непрерывно убывает при приближении к оси вихря (обратно пропорционально квадрату расстояния до оси). Везде в поле вихря давление p меньше давления p_∞ в спокойной атмосфере, т. е в поле вихря имеет место подсасывание.

Отсюда следует, что всякое симметричное тело, находящееся в поле вихря, испытывает кроме силы лобового сопротивления, направленной по линиям тока, еще подсасывающую силу, направленную к оси вихря. Эта сила происходит оттого, что к части поверхности тела, обращенной к оси вихря, приложены давления, меньшие, нежели к противоположной части. Подсасывающим действием вихря объясняется тот факт, что ядро вихря в воздухе, например смерча, состоит из песка, воды и прочих попадающихся на пути предметов, которые засасываются в область ядра.

Быстрым возрастанием абсолютной величины $p-p_\infty$ при приближении к оси вихря объясняются резкие границы, которыми очерчивается обычно область разрушения, производимого при прохождении смерча. Неоднократно наблюдалось, например, что смерч, проходя по лесу или селению, оставляет за собой узкую полосу разрушения, по сторонам которой стоят неповрежденными деревья и дома, более слабые, чем рядом с ними снесенные или вырванные с корнем.

Рассмотрим теперь случай сжимаемой среды и предположим, что тепловой процесс является адиабатическим. Тогда, подставляя в уравнение (5.13) $\Pi=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$, $\Pi_\infty=\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}$, получим:

$$\frac{p}{\rho}-\frac{p_\infty}{\rho_\infty}=-\frac{k-1}{k}\frac{\Gamma^2}{8\pi^2r^2}.$$

Так как $p/\rho=RT$, где R есть газовая постоянная, то последнее равенство определяет также избыточную температуру

$$T-T_\infty=-\frac{k-1}{kR}\frac{\Gamma^2}{8\pi^2r^2}. \tag{5.15}$$

Отсюда видно, что по мере приближения к оси вихря, находящегося в сжимаемой среде, избыточная температура в потоке убывает, причем ее абсолютная величина нарастает обратно пропорционально квадрату расстояния до оси вихря [1]).

П р и м е р 2. Выясним распределение давлений в ядре плоского вихря, предполагая, что скорости внутри ядра распределены по линейному закону (т. е. так же, как в случае вращения твердого тела вокруг оси).

Для решения этого вопроса непригоден ни один из известных нам интегралов уравнений аэродинамики, и поэтому мы обратимся к самим уравнениям. Возьмем их в форме уравнений Эйлера. Предполагая, что ось вихря вертикальна, как и в предыдущем примере, и имея, следовательно, $X=Y=0$, получим для движения жидкости в плоскостях, параллельных плоскости x, y, следующие уравнения:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

[1]) Нарастание температуры газа при удалении от оси вихря и одновременное нарастание давления дают возможность отделить друг от друга нагретую и охлажденную части газового вихря. Если придать потоку газа вращение вокруг оси с помощью спиральной камеры и затем направить поток в трубку, один конец которой задросселирован, то к этому концу устремится нагретый газ с повышенным давлением, а к противоположному — охлажденный газ с пониженным давлением из внутренней части вихря. Более подробно об этом см.: Д у б и н с к и й М. Г., Вихревой энергоразделитель потока, Изв. Академии наук СССР, ОТН, № 6, 1955; А л е к с е е в В. П., М а р т ы н о в с к и й В. С., Эффект вихревого температурного разделения перегретых паров, Изв. Академии наук СССР, ОТН, № 1, 1956; М е р к у л о в А. Л., Исследование вихревой трубы, Журнал технич. физики, т. XXVI, вып. 6, 1956.

Так как движение плоское, то третьего уравнения не пишем. Обозначим через ω угловую скорость вращения частиц в ядре вихря (в случае вращения по законам твердого тела эта величина есть постоянная для всех частиц внутри ядра). Компоненты линейной скорости v_x и v_y тогда определятся по формулам

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x;$$

следовательно,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

и для вычисления давлений получаем уравнения

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Умножим первое из этих уравнений почленно на dx, второе — на dy и сложим; в результате будем иметь:

$$dp = \rho\omega^2 (x\,dx + y\,dy) = \frac{\rho\omega^2}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{\rho\omega^2}{2} dr^2.$$

Если среда несжимаема ($\rho = \text{const}$), то, интегрируя, находим:

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из того условия, чтобы на границе ядра, т. е. при $r = r_0$, где r_0 есть радиус ядра, давление p изнутри было равно давлению в этом месте снаружи, определенному по формуле (5.14). Это условие приводит к равенству

$$\frac{\rho\omega^2}{2} r_0^2 + C = p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2},$$

откуда

$$C = p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} - \frac{\rho\omega^2}{2} r_0^2,$$

или, так как $\Gamma = 2\pi r_0^2\omega$, то

$$C = p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2.$$

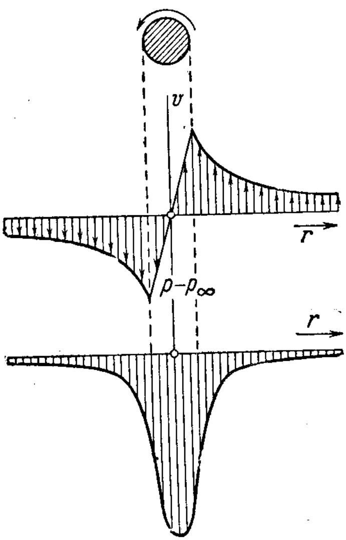

Рис. 5.3. Распределение скоростей и давлений внутри вихревого ядра и вне его.

Для избыточного давления внутри ядра получается, таким образом, формула

$$p - p_\infty = \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - 2r_0^2); \qquad (5.16)$$

это — величина отрицательная (ибо для ядра $r < r_0$), убывающая при приближении к оси вихря: при $r \to 0$ она стремится к $-\rho\omega^2 r_0^2$, что и представляет собой величину избыточного давления на оси вихря.

Распределение давлений в ядре вихря, как видно из последней формулы, следует параболическому закону. На границе ядра парабола сопрягается с кривой уравнения (5.14), изображающей распределение давления в поле вихря. На рис. 5.3 представлено распределение давления в плоском вихре, вычисленное для ядра по формуле (5.16), для внешней к нему части — по формуле (5.14).

Пример 3. Тяжелая несжимаемая жидкость, налитая в цилиндрический круговой сосуд, вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω. Требуется определить в этом случае распределение давлений в жидкости и форму ее свободной поверхности.

Условием для определения формы свободной поверхности является, как известно из § 2, постоянство давления p в точках, находящихся на этой поверхности. Мы найдем поэтому сначала распределение давления, а затем запишем условие, которому оно должно удовлетворять на свободной поверхности. Так как компоненты скоростей в каждой точке определяются здесь по тем же формулам, что и в предыдущем примере, то уравнения Эйлера для данной задачи имеют вид

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

где g есть величина ускорения силы тяжести.

Составим, так же как и в предыдущем примере, выражение для полного дифференциала давления; для этого умножим первое равенство почленно на dx, второе — на dy, третье — на dz и сложим; тогда получится:

$$dp = \frac{\rho\omega^2}{2}\, d\,(x^2 + y^2) - \gamma\, dz.$$

Отсюда, интегрируя, находим распределение давлений:

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \gamma z + C.$$

Обозначим давление на свободной поверхности жидкости через p_0; форма этой поверхности определится тогда из уравнения

$$p_0 + \gamma z = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

Это есть уравнение параболоида вращения с осью, направленной вдоль оси z. Постоянную интегрирования C можно определить, если известен объем жидкости в сосуде.

Пример 4. Вычислим распределение давления для случая взрыва мины под водой. Будем при этом считать, что взрыв происходит в безграничной среде и действие его распространяется одинаково по всем направлениям, исходящим из точки взрыва. Распределение скоростей в потоке, возникающем от взрыва, будет, следовательно, такое, как от источника с центром в точке взрыва и расходом Q, определяемым мощностью взрыва:

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Движение, возникшее от взрыва, является неустановившимся: в начальный момент времени скорости во всех точках равны нулю, а через некоторый малый промежуток времени Δt, истекший от начального момента, частицы, находящиеся вблизи места взрыва, имеют уже конечную скорость v, определяемую последней формулой. Нас интересует здесь распределение давлений именно в этот начальный период движения, когда оно является неустановившимся.

Из последней формулы видно, что поле скоростей, возникшее от взрыва, имеет потенциал

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}.$$

Налицо, таким образом, все условия для того, чтобы применить в этой задаче для вычисления давлений интеграл Лагранжа.

Однако для этого необходимо предварительно определить $\partial\varphi/\partial t$. Это можно сделать, исходя из следующих соображений. Возьмем какую-либо фиксированную точку в потоке. В начальный момент времени $t=0$ значение потенциала в этой точке равно нулю; в момент времени $t=\Delta t$ значение потенциала в той же точке равно $\varphi=-Q/4\pi r$; следовательно, $\Delta\varphi=\varphi=-Q/4\pi r$. Ввиду малости Δt отношение $\Delta\varphi/\Delta t$ можно приближенно принять равным $\partial\varphi/\partial t$, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\approx-\frac{Q}{4\pi\Delta t}\,\frac{1}{r}.$$

Уравнение Лагранжа для рассматриваемого потока напишется теперь в виде

$$p+\frac{\rho}{2}\,\frac{Q^2}{(4\pi r^2)^2}-\rho\,\frac{Q}{4\pi\Delta t}\,\frac{1}{r}=p_\infty.$$

Объемными силами мы здесь пренебрегаем, так как они малы по сравнению с импульсивными (мгновенно возникающими) силами давления. Из последнего равенства вытекает:

$$p-p_\infty=\frac{Q\rho}{4\pi\Delta t}\,\frac{1}{r}-\frac{\rho Q^2}{2\,(4\pi r^2)^2}.$$

Так как рассматриваемый промежуток времени Δt весьма мал, то для не очень малых r вторым слагаемым в правой части можно пренебречь по сравнению с первым и, следовательно, приближенно считать, что

$$p-p_\infty=\frac{Q\rho}{4\pi\Delta t}\,\frac{1}{r}. \tag{5.17}$$

Мы получили, таким образом, весьма интересный результат: взрывное давление *возрастает* при приближении к центру взрыва обратно пропорционально расстоянию до него.

Этот результат качественно отличен от того, который получился бы в случае установившегося потока с тем же распределением скоростей, которое было взято здесь. Взяв источник с расходом Q, считая этот поток установившимся, и применяя к нему интеграл Эйлера, мы получили бы в этом случае следующую формулу для избыточного давления:

$$p-p_\infty=-\frac{\rho Q^2}{2\,(4\pi r^2)^2}. \tag{5.18}$$

Здесь, как видим, избыточное давление *убывает* при приближении к центру источника.

Из сопоставления этого результата с предыдущим можно заключить, насколько важен фактор нестационарности движения.

§ 6. Движение, возникшее от внезапно приложенных сил давления

Мы остановимся теперь на одном частном случае движения, в котором также могут быть проинтегрированы дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Это — случай, когда движение возникает (или изменяется существующее в жидкости движение) от действия сил давления, приложенных в течение некоторого малого промежутка времени $(0, \tau)$, но достигших за это время больших величин.

В действительности такое движение встречается весьма часто. Оно имеет место всегда, когда тело, находящееся в жидкой среде, начинает двигаться или останавливается, вообще, резко изменяет состояние своего движения. Представим себе, например, что в начальный момент тело и