Однако для этого необходимо предварительно определить $\partial\varphi/\partial t$. Это можно сделать, исходя из следующих соображений. Возьмем какую-либо фиксированную точку в потоке. В начальный момент времени $t=0$ значение потенциала в этой точке равно нулю; в момент времени $t=\Delta t$ значение потенциала в той же точке равно $\varphi=-Q/4\pi r$; следовательно, $\Delta\varphi=\varphi=$ $=-Q/4\pi r$. Ввиду малости Δt отношение $\Delta\varphi/\Delta t$ можно приближенно принять равным $\partial\varphi/\partial t$, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\approx-\frac{Q}{4\pi\Delta t}\frac{1}{r}.$$

Уравнение Лагранжа для рассматриваемого потока напишется теперь в виде

$$p+\frac{\rho}{2}\frac{Q^2}{(4\pi r^2)^2}-\rho\frac{Q}{4\pi\Delta t}\frac{1}{r}=p_\infty.$$

Объемными силами мы здесь пренебрегаем, так как они малы по сравнению с импульсивными (мгновенно возникающими) силами давления. Из последнего равенства вытекает:

$$p-p_\infty=\frac{Q\rho}{4\pi\Delta t}\frac{1}{r}-\frac{\rho Q^2}{2(4\pi r^2)^2}.$$

Так как рассматриваемый промежуток времени Δt весьма мал, то для не очень малых r вторым слагаемым в правой части можно пренебречь по сравнению с первым и, следовательно, приближенно считать, что

$$p-p_\infty=\frac{Q\rho}{4\pi\Delta t}\frac{1}{r}. \tag{5.17}$$

Мы получили, таким образом, весьма интересный результат: взрывное давление *возрастает* при приближении к центру взрыва обратно пропорционально расстоянию до него.

Этот результат качественно отличен от того, который получился бы в случае установившегося потока с тем же распределением скоростей, которое было взято здесь. Взяв источник с расходом Q, считая этот поток установившимся, и применяя к нему интеграл Эйлера, мы получили бы в этом случае следующую формулу для избыточного давления:

$$p-p_\infty=-\frac{\rho Q^2}{2(4\pi r^2)^2}. \tag{5.18}$$

Здесь, как видим, избыточное давление *убывает* при приближении к центру источника.

Из сопоставления этого результата с предыдущим можно заключить, насколько важен фактор нестационарности движения.

§ 6. Движение, возникшее от внезапно приложенных сил давления

Мы остановимся теперь на одном частном случае движения, в котором также могут быть проинтегрированы дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Это — случай, когда движение возникает (или изменяется существующее в жидкости движение) от действия сил давления, приложенных в течение некоторого малого промежутка времени $(0, \tau)$, но достигших за это время больших величин.

В действительности такое движение встречается весьма часто. Оно имеет место всегда, когда тело, находящееся в жидкой среде, начинает двигаться или останавливается, вообще, резко изменяет состояние своего движения. Представим себе, например, что в начальный момент тело и окружающая его среда находятся в состоянии покоя; затем тело начинает двигаться, приводя в движение частицы среды. Движение в среде возникает здесь оттого, что в начальный период движения $(0, \tau)$ на частицы среды от каждого элемента поверхности тела действует сила давления, изменяющаяся с течением времени. Частицы, находящиеся у поверхности тела, передают силу давления частицам, расположенным дальше от поверхности тела, и, таким образом, каждая частица в среде испытывает при этом действие внезапно приложенной силы давления.

Ввиду того, что силы давления быстро достигают больших величин, а действие сил трения проявляется лишь по истечении некоторого промежутка времени, можно пренебрегать в начальный период движения силами трения и, следовательно, исходить из представления об идеальной среде.

В случае действия мгновенных сил можно пренебрегать также стационарными силами, т. е. в нашем случае — внешними объемными силами. Уравнения Эйлера для движения, возникшего от внезапно приложенных сил давления, будут, следовательно, иметь вид

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Умножим каждое из этих уравнений почленно на dt и, предполагая, что среда баротропна, проинтегрируем эти уравнения по t в промежутке $(0, \tau)$; тогда получим:

$$v_{x\tau} - v_{x0} = -\int_0^\tau \frac{\partial \Pi}{\partial x}\,dt, \quad v_{y\tau} - v_{y0} = -\int_0^\tau \frac{\partial \Pi}{\partial y}\,dt,$$

$$v_{z\tau} - v_{z0} = -\int_0^\tau \frac{\partial \Pi}{\partial z}\,dt.$$

Здесь v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} означают составляющие скорости в начальный момент времени $t = 0$, $v_{x\tau}$, $v_{y\tau}$, $v_{z\tau}$ — составляющие скорости в момент времени $t = \tau$.

Будем предполагать, что ввиду малости τ перемещения частиц за рассматриваемый промежуток времени пренебрежимо малы (однако скорости считаем величинами конечными). Это означает, иными словами, что $\boldsymbol{v}_\tau$ относится к *той же точке* пространства, что и $\boldsymbol{v}_0$. Это означает, далее, что в правых частях последних равенств x, y, z не зависят от t: они фигурируют под знаками интегралов лишь как параметры. Но, как известно из математики, интеграл (с постоянными пределами) от производной, взятой по параметру, равен, в случае если она непрерывна, производной по этому же параметру от интеграла. Можно, следовательно, при указанных здесь предположениях переставить в последних равенствах операции дифференцирования и интегрирования; выполняя это, получим:

$$v_{x\tau} - v_{x0} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\tau \Pi\,dt, \quad v_{y\tau} - v_{y0} = -\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\tau \Pi\,dt,$$

$$v_{z\tau} - v_{z0} = -\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\tau \Pi\,dt.$$

Интеграл $\int_0^\tau \Pi\,dt$, который входит здесь во все правые части, представляет собой, очевидно, импульс давления, от действия которого возникло (или изменилось) движение.

Последними формулами обнаруживается интересное свойство, которым обладает движение, возникшее от приложенных к жидкости сил давления. Составляющие скорости такого движения равны соответствующим производным по координатам x, y, z от одной и той же функции, именно от $-\int_0^\tau \Pi\, dt$.

Движение, возникшее от сил давления, оказывается, таким образом, потенциальным движением; потенциал скоростей такого движения равен

$$\varphi = -\int_0^\tau \Pi\, dt. \tag{5.19}$$

Если по истечении промежутка времени $(0, \tau)$ движение можно считать установившимся, то φ, определенное по этой формуле, есть функция только координат точки x, y, z. Мы подчеркиваем этим, что последний результат имеет общий характер. Потенциал скоростей всякого движения можно рассматривать как величину, пропорциональную импульсу сил давления, от действия которых возникло движение.

Изложенное можно обобщить и на тот случай, когда на жидкость действуют мгновенно приложенные объемные силы, имеющие потенциал. Движение, вызванное этими силами, также является потенциальным.

Мы заключаем отсюда, что *силы давления и силы тяжести не могут вызвать в баротропной среде вращения частиц* и не могут изменить его, если оно имеется в начальный моменг времени; вращение частиц может быть вызвано здесь лишь действием сил трения.

Заметим в заключение, что если это свойство рассматриваемого движения известно, то формула (5.19), устанавливающая выражение потенциала скоростей через импульс сил давления, может быть выведена не только так, как изложено выше, т. е. путем интегрирования уравнений Эйлера, но и непосредственно из интеграла Лагранжа (равенство (5.6)).

§ 7. Свойства вихрей в идеальной баротропной среде. Теорема Томсона об изменении циркуляции скорости с течением времени

Наиболее простой и эффективный способ установления свойств вихрей был указан В. Томсоном. Он базируется на использовании понятия о циркуляции скорости по замкнутому контуру. Основной результат выражается здесь в виде следующей теоремы Томсона.

Теорема Томсона. *Если силы, действующие в баротропной жидкости, имеют потенциал, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не изменяется с течением времени.*

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним, что жидким контуром называется такой контур, который во все время движения состоит из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, во время движения жидкий контур деформируется и перемещается вместе с жидкостью.

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру L называется, как известно из кинематики жидкости, величина

$$\Gamma = \oint_{(L)} v_s \delta s = \oint_{(L)} (v_x \delta x + v_y \delta y + v_z \delta z).$$