Последними формулами обнаруживается интересное свойство, которым обладает движение, возникшее от приложенных к жидкости сил давления. Составляющие скорости такого движения равны соответствующим производным по координатам x, y, z от одной и той же функции, именно от $-\int\limits_0^\tau \Pi\,dt$.

Движение, возникшее от сил давления, оказывается, таким образом, потенциальным движением; потенциал скоростей такого движения равен

$$\varphi = -\int\limits_0^\tau \Pi\,dt. \tag{5.19}$$

Если по истечении промежутка времени $(0, \tau)$ движение можно считать установившимся, то φ, определенное по этой формуле, есть функция только координат точки x, y, z. Мы подчеркиваем этим, что последний результат имеет общий характер. Потенциал скоростей всякого движения можно рассматривать как величину, пропорциональную импульсу сил давления, от действия которых возникло движение.

Изложенное можно обобщить и на тот случай, когда на жидкость действуют мгновенно приложенные объемные силы, имеющие потенциал. Движение, вызванное этими силами, также является потенциальным.

Мы заключаем отсюда, что *силы давления и силы тяжести не могут вызвать в баротропной среде вращения частиц* и не могут изменить его, если оно имеется в начальный моменг времени; вращение частиц может быть вызвано здесь лишь действием сил трения.

Заметим в заключение, что если это свойство рассматриваемого движения известно, то формула (5.19), устанавливающая выражение потенциала скоростей через импульс сил давления, может быть выведена не только так, как изложено выше, т. е. путем интегрирования уравнений Эйлера, но и непосредственно из интеграла Лагранжа (равенство (5.6)).

§ 7. Свойства вихрей в идеальной баротропной среде. Теорема Томсона об изменении циркуляции скорости с течением времени

Наиболее простой и эффективный способ установления свойств вихрей был указан В. Томсоном. Он базируется на использовании понятия о циркуляции скорости по замкнутому контуру. Основной результат выражается здесь в виде следующей теоремы Томсона.

Теорема Томсона. *Если силы, действующие в баротропной жидкости, имеют потенциал, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не изменяется с течением времени.*

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним, что жидким контуром называется такой контур, который во все время движения состоит из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, во время движения жидкий контур деформируется и перемещается вместе с жидкостью.

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру L называется, как известно из кинематики жидкости, величина

$$\Gamma = \oint\limits_{(L)} v_s \delta s = \oint\limits_{(L)} (v_x \delta x + v_y \delta y + v_z \delta z).$$

Здесь через δx, δy, δz обозначены проекции элемента дуги контура δs на оси координат в отличие от dx, dy, dz, которые будут означать изменения координат во времени. Вычислим, предполагая, что L есть жидкий контур, производную от циркуляции скорости Γ по времени t:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\limits_{(L)}(v_x\delta x+v_y\delta y+v_z\delta z)=\oint\limits_{(L)}\frac{d}{dt}(v_x\delta x+v_y\delta y+v_z\delta z).$$

В выражении, находящемся под знаком производной, зависят от времени не только компоненты скорости v_x, v_y, v_z, но ввиду того, что контур деформируется и перемещается, — также проекции на оси координат элемента дуги контура δx, δy, δz; поэтому, выполняя дифференцирование, получаем:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dv_x}{dt}\delta x+\frac{dv_y}{dt}\delta y+\frac{dv_z}{dt}\delta z\right)+$$
$$+\oint\limits_{(L)}\left[v_x\frac{d(\delta x)}{dt}+v_y\frac{d(\delta y)}{dt}+v_z\frac{d(\delta z)}{dt}\right]=\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dv_x}{dt}\delta x+\frac{dv_y}{dt}\delta y+\frac{dv_z}{dt}\delta z\right)+$$
$$+\oint\limits_{(L)}\left[v_x\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)+v_y\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)+v_z\delta\left(\frac{dz}{dt}\right)\right].$$

Займемся сначала вторым из этих интегралов. Так как

$$\frac{dx}{dt}=v_x,\qquad \frac{dy}{dt}=v_y,\qquad \frac{dz}{dt}=v_z,$$

то этот интеграл можно записать в виде

$$\oint\limits_{(L)}(v_x\delta v_x+v_y\delta v_y+v_z\delta v_z)=\frac{1}{2}\oint\limits_{(L)}\delta(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}\oint\limits_{(L)}\delta v^2=\frac{1}{2}v^2\Big|_A^B,$$

где A и B суть начальная и конечная точки при обходе по контуру L. Но так как контур L замкнутый, то точки A и B совпадают друг с другом, и в результате двойной подстановки получается нуль. Таким образом, второй интеграл в выражении для $d\Gamma/dt$, происходящий от движения и деформации контура, равен нулю.

Перейдем теперь к первому интегралу в выражении для $d\Gamma/dt$. Нетрудно видеть, что он построен по тому же типу, как и выражение для циркуляции скорости, с той лишь разницей, что составляющие скорости заменены составляющими ускорения. Мы получаем, таким образом, следующий совершенно общий результат (т. е. не зависящий от сил, действующих в жидкости), который называют иногда *кинематической теоремой Томсона*:

Производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.

Величина циркуляции ускорения по замкнутому контуру, очевидно, будет разная, в зависимости от сил, которые действуют в жидкости.

Если жидкость в точках контура может быть рассматриваема как идеальная, то компоненты ускорения определяются по уравнениям Эйлера:

$$\frac{dv_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{dv_y}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{dv_z}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Предположим теперь, что объемные силы, действующие в жидкости, имеют потенциал, т. е. что X, Y, Z могут быть выражены через потенциал U следующим образом:

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y=-\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z=-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В случае если объемными силами являются силы тяжести, это предположение, как мы знаем, соответствует действительности. Предположим, кроме того, что жидкость баротропна; тогда составляющие ускорения могут быть записаны в виде

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\partial}{\partial x}(U+\Pi),\ \frac{dv_y}{dt}=-\frac{\partial}{\partial y}(U+\Pi),\ \frac{dv_z}{dt}=-\frac{\partial}{\partial z}(U+\Pi). \qquad (5.20)$$

Как видим из последних равенств, ускорение частицы имеет в этом случае потенциал, равный $U+\Pi$.

Вернемся к вычислению производной $d\Gamma/dt$; подставляя в формулу для $d\Gamma/dt$ вместо проекций ускорения частицы их выражения (5.20), находим:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint\limits_{(L)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(U+\Pi)\,\delta x+\frac{\partial}{\partial y}(U+\Pi)\,\delta y+\frac{\partial}{\partial z}(U+\Pi)\,\delta z\right]=$$

$$=-\oint\limits_{(L)} d\,(U+\Pi)=-(U+\Pi)\Big|_A^B=0,$$

так как контур замкнут, а функция $U+\Pi$ однозначна и, следовательно, при обходе по контуру и возвращении в исходную точку принимает начальное значение. Из последнего равенства вытекает, что при указанных предположениях $\Gamma=\mathrm{const}$ во все время движения. Теорема Томсона, таким образом, доказана.

Следует заметить, что последний результат ($\Gamma=\mathrm{const}$), вообще говоря, не имеет места, если жидкость в точках контура L вязкая или небаротропная. Силы вязкости, а следовательно, и ускорения частиц, происходящие от вязкости, не имеют потенциала; поэтому в случае вязкой жидкости под знаком интеграла в выражении для $d\Gamma/dt$ не получится полный дифференциал и $d\Gamma/dt$ не будет равно нулю.

Точно так же, если среда является небаротропной, то $\rho=f(p, T)$, dp/ρ не будет полным дифференциалом и $d\Gamma/dt$, вообще говоря, не будет равно нулю.