

§ 8. Теоремы Гельмгольца о вихрях. Разгонный и остановочный вихри крыла

Из теоремы Томсона вытекают в качестве следствий свойства вихрей в идеальной жидкости, которые были впервые установлены Гельмгольцем и называются теоремами Гельмгольца о вихрях.

Вторая теорема Гельмгольца¹⁾. *Если силы, действующие в баротропной жидкости, имеют потенциал, то вихревая трубка во все время движения состоит из одних и тех же частиц жидкости.*

Для того чтобы доказать эту теорему, применим теорему Томсона к контуру, который всеми своими точками лежит на поверхности вихревой трубки, но не охватывает ее (рис. 4.61). Циркуляция скорости по всякому такому контуру, по теореме Стокса, равна нулю, ибо на поверхности вихревой трубки $\omega_n = 0$.

Можно высказать также обратное утверждение. Если циркуляция скорости по *всякому* замкнутому контуру, лежащему всеми своими точками на данной поверхности, равна нулю, то эта поверхность есть поверхность вихревой трубки. В самом деле, в этом случае во всех точках данной поверхности $\omega_n = 0$ и, следовательно, во всех точках поверхность касательна к вихревым линиям. По определению это и есть поверхность вихревой трубки. Таким образом, условие равенства нулю циркуляции скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на данной поверхности и ее не охватывающему, есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы эта поверхность была поверхностью вихревой трубки.

Если силы, действующие в жидкости, имеют потенциал, то по теореме Томсона циркуляция скорости по всякому такому жидкому контуру остается равной нулю во все время движения. Следовательно, поверхность вихревой трубки, которая полностью определяется этим свойством лежащих на ней жидких контуров, во все время движения остается поверхностью вихревой трубки. Эта поверхность отделяет внутреннюю для вихревой трубки массу жидкости от наружной. Так как эта поверхность во все время движения, при всех своих деформациях, состоит из одних и тех же частиц жидкости (ибо она является жидкой поверхностью), то ни одна частица жидкости не может перейти из области внутри вихревой трубки наружу или обратно. Если, стягивая до нуля поперечное сечение вихревой трубки, перейти от нее к вихревой линии, как к пределу, то получим, что каждая вихревая линия во все время движения также состоит из одних и тех же частиц жидкости.

Вторая теорема Гельмгольца устанавливает, таким образом, что распространение вращательного движения на новые частицы жидкости

¹⁾ Первая теорема Гельмгольца о вихрях имеет общий характер, т. е. относится к любой жидкости. Она была доказана в кинематике жидкости.

или, наоборот, переход частиц от вращательного движения к потенциальному могут произойти в баротропной среде лишь под действием сил, не имеющих потенциала, в частности под действием сил трения.

Третья теорема Гельмгольца. *Если силы, действующие в баротропной жидкости, имеют потенциал, то интенсивность вихревой трубки есть величина постоянная во все время движения.*

Для того чтобы доказать эту теорему, применим теорему Томсона к контуру L , который охватывает вихревую трубку и всеми своими точками лежит на ее поверхности (рис. 4.60).

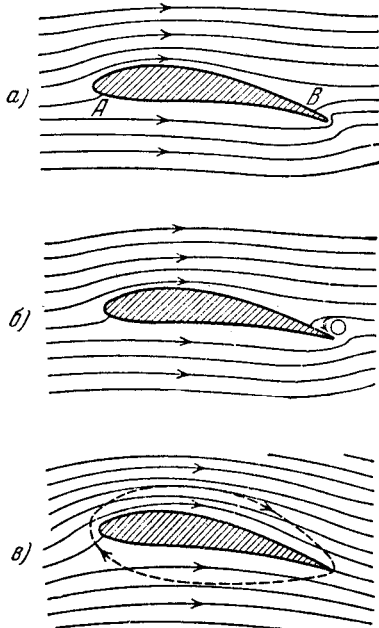


Рис. 5.4. Схемы обтекания профиля крыла в начальный период движения.

сти может происходить только от действия сил, не имеющих потенциала, например от действия сил трения.

Если же баротропная жидкость идеальна, то интенсивности вихрей изменяться не могут, и в частности, если в идеальной жидкости вихри в какой-либо момент времени отсутствуют, т. е. движение во всех точках потенциально, то оно будет оставаться потенциальным во всякий другой момент времени. Последнее положение называется обычно *теоремой Лагранжа*.

Теорема Томсона позволяет сделать интересные заключения о природе возникновения циркуляции скорости вокруг крыла. Наблюдения показывают, что в начальный момент движения крыла, когда силы вязкости еще не проявляют своего действия, поток потенциален и циркуляция скорости отсутствует. При этом ввиду несимметрии про-

Вследствие второй теоремы Гельмгольца этот контур будет во все время движения находиться на поверхности вихревой трубки и будет состоять из одних и тех же частиц жидкости; он является поэтому жидким контуром. Так как силы, действующие в жидкости, по предположению, имеют потенциал, то по теореме Томсона циркуляция скорости по контуру L во все время движения остается постоянной. Но по теореме Стокса циркуляция скорости по контуру, охватывающему вихревую трубку, равна удвоенной интенсивности ее. Следовательно, в данном случае остается постоянной во все время движения и интенсивность вихревой трубки.

Из третьей теоремы Гельмгольца следует, что изменение интенсивности вихрей в баротропной жидкости

филя или ввиду наличия угла атаки, не равно нулю, задняя критическая точка располагается обычно на верхней части профиля, так, как показано на рис. 5.4, *a* (точка *B*). Затем под действием сил вязкости частицы затормаживаются у контура профиля, образуя пограничный слой, который нарастается в направлении движения. Пограничный слой нижней поверхности обходит заднюю кромку профиля и встречает затем область нарастающего давления; в связи с этим пограничный слой не достигает критической точки, а отрывается и, сворачиваясь, образует вихрь, вращающийся, в случае, показанном на

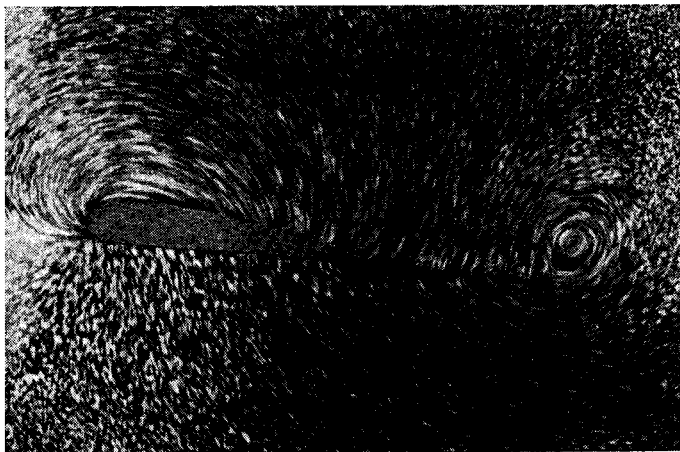


Рис. 5.5. Разгонный вихрь, образующийся за крылом в начальный период движения.

рис. 5.4, *b*, против часовой стрелки. При этом задняя критическая точка смещается вдоль потока до совпадения с задней кромкой профиля. В дальнейшем пограничный слой сходит с верхней и нижней дужек профиля в его задней кромке (рис. 5.4, *в*).

Вихрь, который образуется у задней кромки крыла в начальный момент движения, называется *начальным* или *разгонным вихрем*. Он изображен на приводимой фотографии (рис. 5.5), которая была снята фотоаппаратом, двигавшимся вместе с крылом.

На первый взгляд образование разгонного вихря как будто противоречит теореме Томсона. В самом деле, в начальный момент движения циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему профиль крыла (рис. 5.6, *a*), равна нулю (так как в точках контура жидкость можно считать идеальной). Из теоремы Томсона следует, что циркуляция скорости по этому контуру должна быть равна нулю во все время движения. Однако после образования начального вихря циркуляция скорости по тому же жидкому контуру как будто уже

не равна нулю, а равна удвоенной интенсивности начального вихря (рис. 5. 6, б).

Это кажущееся противоречие с теоремой Томсона разъясняется, если мы вспомним, что при возникновении разгонного вихря изменяется вся картина течения жидкости вокруг профиля и, в частности, смещается вдоль его контура задняя критическая точка. Скорости частиц вблизи контура в связи с этим перераспределяются, и поток вокруг профиля становится циркуляционным.

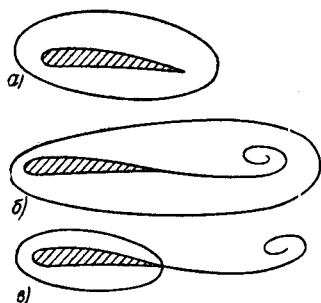


Рис. 5.6. Образование циркуляции по контуру, охватывающему профиль крыла при отходе разгонного вихря.

Теорема Томсона позволяет в данном случае заключить, что при образовании разгонного вихря в начальный период движения вокруг профиля крыла возникает циркуляция скорости, равная по величине циркуляции вокруг разгонного вихря и обратная ей по знаку (рис. 5. 6, в). Только при возникновении такой циркуляции во-

круг профиля может остаться равной нулю циркуляция скорости по взятому вначале жидкому контуру.

Изложенные соображения подтверждаются явлениями, которые происходят при внезапной остановке движущегося крыла. Наблюдения

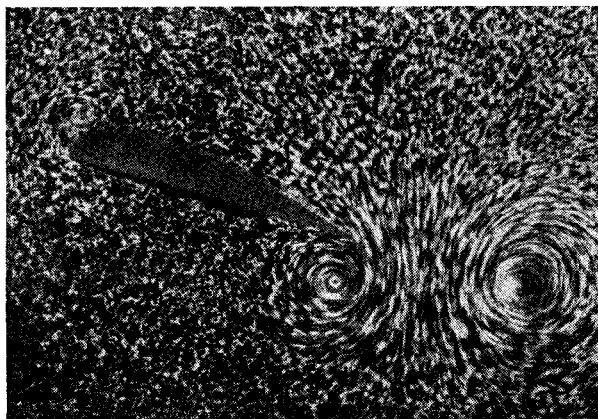


Рис. 5.7. Разгонный и остановочный вихри крыла. Крыло было приведено в движение и затем остановлено.

показывают, что при этом пограничный слой верхней дужки профиля, движущийся более быстро, нежели на нижней дужке, обтекая заднюю кромку, сворачивается в вихрь, который имеет противоположное по сравнению с разгонным направление вращения и такую же по абсо-

плотной величине интенсивность (рис. 5.7); он называется *остановочным вихрем*. Таким образом, циркуляция скорости по первоначальному жидкому контуру здесь все же равна нулю, в полном соответствии с теоремой Томсона.

Наблюдения показывают далее, что при всяком изменении угла атаки профиля или скорости его движения от задней кромки отходят начальные вихри, циркуляция вокруг которых одинакова по абсолютной величине и противоположна по знаку изменению циркуляции вокруг профиля. Эти вихри необходимо учитывать, например, при изучении вибраций крыльев.

Начальные вихри и вихри, которые образуются на крыле, являются, таким образом, парными вихрями в том смысле, что их суммарная интенсивность всякий раз равна нулю в соответствии с теоремой Томсона.

§ 9. Возникновение вихрей в идеальном газе

Рассмотрим теперь общий случай небаротропной среды и выясним, от каких обстоятельств зависит изменение циркуляции скорости в такой среде. Согласно кинематической теореме Томсона можем написать:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{(L)} \left(\frac{dv_x}{dt} \delta x + \frac{dv_y}{dt} \delta y + \frac{dv_z}{dt} \delta z \right).$$

Подставляя сюда вместо dv_x/dt , dv_y/dt , dv_z/dt их выражения по уравнениям Эйлера и предполагая, что объемные силы имеют потенциал, получим:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{(L)} \frac{dp}{\rho}.$$

Выразим в этой формуле плотность через давление и температуру по уравнению состояния. Возьмем это уравнение в простейшем виде, в форме уравнения Клапейрона:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

Производная от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру будет иметь теперь вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \oint_{(L)} \frac{T}{p} dp.$$

Введем в рассмотрение поверхности равного давления в газе, т. е. поверхности, во всех точках которых $p = \text{const}$ (они называются изобарическими поверхностями), и поверхности равной температуры, т. е. поверхности, во всех точках которых $T = \text{const}$ (они называются изотермическими поверхностями).