влении, указанном стрелкой (от $\operatorname{grad} p$ к $\operatorname{grad} T$). Воздух движется у Земли от полюсов к экватору, у экватора поднимается, в верхних слоях течет от экватора к полюсу и у полюса опускается вниз. Ветер,

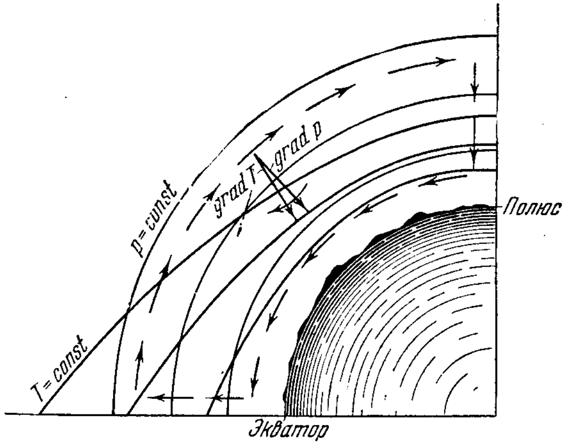

Рис. 5.9. Пересечение в атмосфере изобарических и изотермических поверхностей между полюсом и экватором и возникновение циркуляционного движения.

который происходит от этого циркуляционного движения, называется, как известно, пассатом (или антипассатом).

Аналогично происхождение муссонов, бризов и циклонов.

§ 10. Потенциальное движение идеальной баротропной жидкости. Общее уравнение для потенциала скоростей

При движении удобообтекаемого тела в жидкости или газе можно считать в большинстве случаев, что поток потенциален. Исключение составляют лишь некоторые области с весьма малой поперечной протяженностью: скачки уплотнения, пограничный слой и спутная струя за телом, где течение является вихревым.

Рассмотрим теперь потенциальное течение газа и составим уравнение для потенциала скоростей. Будем предполагать при этом среду идеальной и баротропной, а течение установившимся. Как и в случае несжимаемой жидкости, будем исходить при выводе уравнения для потенциала скоростей из уравнения неразрывности движения, которое для установившегося течения имеет вид (гл. 2, § 3):

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0,$$

или

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Исключим отсюда плотность ρ с помощью уравнений движения идеальной жидкости. Пренебрегая в уравнениях движения идеальной жидкости (5.4) объемными силами, как это обычно делается при изучении течений газа с большими скоростями или ускорениями, получим, что в случае установившегося движения:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Так как среда баротропна $[\rho=f(p)]$, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y},\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Принимая во внимание, что $dp/d\rho=a^2$, где a есть скорость распространения звука в среде, получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial \rho}{\partial y}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial \rho}{\partial z}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5.21}$$

Подставим эти выражения в уравнение неразрывности движения; тогда оно примет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)+\frac{\partial v_y}{\partial y}\left(1-\frac{v_y^2}{a^2}\right)+\frac{\partial v_z}{\partial z}\left(1-\frac{v_z^2}{a^2}\right)-$$
$$-\frac{v_xv_y}{a^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)-\frac{v_yv_z}{a^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)-\frac{v_xv_z}{a^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0.$$

Так как движение потенциально, то существует потенциал скоростей, т. е. функция координат φ, связанная с компонентами скорости соотношениями

$$v_x=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y},\qquad v_z=\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Заменяя в последнем уравнении компоненты скорости их выражениями через потенциал скоростей, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]-$$
$$-\frac{2}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\frac{2}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}-\frac{2}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}=0.\tag{5.22}$$

Из этого уравнения получается как частный случай (при $a=\infty$) уравнение Лапласа, которому удовлетворяет потенциал скоростей для движения несжимаемой жидкости. В отличие от уравнения Лапласа последнее уравнение нелинейно, и это обстоятельство значительно усложняет его решение.

Производные от потенциала скоростей входят в это уравнение не только явно, но еще и в неявной форме, через посредство скорости распространения звука a. В самом деле, применяя уравнение Эйлера (5.7) к точке, взятой на бесконечности, и к точке, взятой в каком-либо месте потока, получим:

$$v^2+\frac{2}{k-1}a^2=V_\infty^2+\frac{2}{k-1}a_\infty^2, \tag{5.23}$$

где V_∞ и a_∞ соответственно скорость потока и скорость распространения звука в бесконечности. Отсюда следует, что

$$a^2=a_\infty^2+\frac{k-1}{2}(V_\infty^2-v^2)=$$
$$=a_\infty^2+\frac{k-1}{2}\left\{V_\infty^2-\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.$$

Зависимость величины a от производных искомой функции также чрезвычайно осложняет решение уравнения (5.22). Ввиду этих трудностей при решении задачи о потенциальном движении газа обычно стремятся упростить уравнение (5.22), сводя его тем или иным способом к линейному уравнению. Такое упрощение уравнения называется линеаризацией; в дальнейшем мы рассмотрим некоторые способы линеаризации уравнения (5.22).

Граничные условия для потенциала скоростей формулируются в случае газа так же, как и в случае несжимаемой жидкости, т. е. в бесконечности скорость должна быть задана, нормальная составляющая скорости $v_n=\partial\varphi/\partial n$ на поверхности тела должна быть равна нормальной составляющей скорости движения тела.

В случаях плоского и симметрично осевого потока общее уравнение (5.22) для потенциала скоростей упрощается. Для плоского потока, параллельного плоскости xy, уравнение (5.22) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0. \tag{5.24}$$

Если поток является симметрично осевым, а ось x — осью симметрии, то, исходя из уравнения неразрывности движения в цилиндрической системе координат (гл. 2, уравнение (2.14)) и выполняя вычисления, проведенные здесь для прямоугольной системы координат (или делая замену переменных в уравнении (5.22)), можно показать, что потенциал скоростей должен удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\right]-\frac{2}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0. \tag{5.25}$$