§ 11. Уравнения для функции тока плоского и симметрично осевого потока баротропной среды

Рассмотрим установившееся плоское движение идеальной баротропной среды, параллельное плоскости xy. Вне зависимости от того, вихревое оно или безвихревое, как было доказано в § 3 гл. IV, можно ввести функцию тока ψ, связанную с v_x и v_y формулами:

$$\rho v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Линии $\psi(x, y) = \text{const}$ являются здесь, так же как и в случае несжимаемой жидкости, линиями тока. Масса газа, протекающая в единицу времени между цилиндрическими поверхностями, направляющими для которых служат две какие-либо линии тока $\psi = C_1$ и $\psi = C_2$, есть величина, постоянная на всем протяжении этих линий и равная разности $C_1 - C_2$.

Если движение газа потенциально, то, подставляя выражения v_x и v_y через функцию тока в условие отсутствия вращения частиц

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0,$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция тока

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0.$$

Иначе это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0.$$

Производные от плотности по координатам в баротропной среде определяются формулами (5.21). Подставив эти выражения в уравнение для функции тока, получим:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{1}{(a\rho)^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left[1 - \frac{1}{(a\rho)^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{2}{(a\rho)^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0. \quad (5.26)$$

Если поток является симметрично осевым, то, исходя из уравнения неразрывности движения в цилиндрических координатах и определяя функцию тока, как это было сделано в § 3 гл. IV, получим:

$$\rho v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \rho v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Если движение, кроме того, потенциально, то из условия равенства нулю угловой скорости вращения частиц получается следующее уравнение для функции тока:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{1}{(ra\rho)^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left[1 - \frac{1}{(ra\rho)^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + \\ + \frac{2}{(ra\rho)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0. \quad (5.27)$$