потока $v=0$, $p=p_0$, $\rho=\rho_0$; из уравнения энергии (5.33) при этом получается:

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)_0=\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)_0. \tag{5.34}$$

Так как $kp/\rho=a^2=kRT$, то из уравнения энергии (5.33) следует также:

$$a_{10}=a_{20}, \qquad T_{10}=T_{20}. \tag{5.35}$$

Если скорость потока перед скачком и за скачком увеличить до максимальной, возможной при адиабатическом процессе, то в этой точке будет: $v=v_{\max}$, $p=0$; из уравнения энергии тогда получается:

$$v_{1\max}=v_{2\max}. \tag{5.36}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для критической скорости. Так как

$$\frac{v^2}{2}+\frac{k}{k-1}\,\frac{p}{\rho}=\frac{1}{2}\,\frac{k+1}{k-1}v_{\text{кр}}^2,$$

то из уравнения (5.33) следует:

$$v_{1\text{кр}}=v_{2\text{кр}}. \tag{5.37}$$

Последние формулы показывают, что у струйки, пересекающей скачок уплотнения, сохраняются неизменными все величины, характеризующие запас полной энергии в единице массы газа, в том числе максимальная и критическая скорости, температура торможения потока, максимальная скорость распространения звука и т. д.

Перейдем теперь к решению основных уравнений скачка уплотнения.

§ 16. Определение параметров потока газа за скачком уплотнения по параметрам потока газа перед скачком

Из уравнений (5.30) и (5.32), выведенных в предыдущем параграфе, следует, что

$$\boldsymbol{v}_{1t}=\boldsymbol{v}_{2t}. \tag{5.38}$$

Из полученного равенства следует, что векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и нормаль к поверхности скачка расположены в одной плоскости. Вместе с тем из уравнения (5.30) видно, что $v_{1n}\neq v_{2n}$, и так как $\rho_2>\rho_1$, то $v_{1n}>v_{2n}$. Таким образом, когда частица газа проходит сквозь поверхность скачка уплотнения, то касательная составляющая скорости к поверхности скачка остается без изменения, а нормальная составляющая уменьшается. При этом уменьшение нормальной составляющей скорости происходит разрывно, так же как и нарастание плотности.

Из уравнений (5.30) и (5.31) следует, что разность давлений за скачком и перед скачком равна

$$p_2-p_1=\rho_1 v_{1n}(v_{1n}-v_{2n}), \tag{5.39}$$

а из уравнений (5.33) и (5.38) следует, что разность величин $\frac{p_2}{\rho_2}$ и $\frac{p_1}{\rho_1}$ равна

$$\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{k-1}{2k}(v_{1n}-v_{2n})(v_{1n}+v_{2n}). \tag{5.40}$$

Исключив из последних двух уравнений p_2 и подставив вместо ρ_2 его выражение по уравнению (5.30), получим:

$$\frac{k-1}{2k}(v_{1n}-v_{2n})(v_{1n}+v_{2n})\rho_1 v_{1n}+p_1(v_{1n}-v_{2n})-\\-\rho_1 v_{1n} v_{2n}(v_{1n}-v_{2n})=0.$$

Так как $v_{1n}\neq v_{2n}$, то последнее равенство можно сократить на разность $v_{1n}-v_{2n}$. Тогда получится уравнение, линейное относительно v_{2n}, решая которое будем иметь:

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}}=\frac{2kp_1}{(k+1)\rho_1 v_{1n}^2}+\frac{k-1}{k+1}=\frac{2a_1^2}{(k+1)v_{1n}^2}+\frac{k-1}{k+1}=\frac{2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2}{(k+1)\mathrm{M}_{1n}^2}. \tag{5.41}$$

Определив по этой формуле v_{2n}, можно затем найти ρ_2 по формуле

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_{1n}}{v_{2n}}=\frac{(k+1)\mathrm{M}_{1n}^2}{2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2}. \tag{5.42}$$

Подставляя в уравнение (5.39) значение скорости v_{2n} из (5.41) и проделывая элементарные алгебраические преобразования, получим для определения давления p_2 следующую формулу:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k\mathrm{M}_{1n}^2-(k-1)}{k+1}. \tag{5.43}$$

Зная давление и плотность за скачком и температуру перед скачком, нетрудно найти температуру за скачком по известной формуле, связывающей эти величины:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{[2k\mathrm{M}_{1n}^2-(k-1)][2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2]}{(k+1)^2\mathrm{M}_{1n}^2}. \tag{5.44}$$

Из предыдущего известно, что квадрат скорости распространения звука пропорционален температуре, поэтому, принимая во внимание (5.44), имеем:

$$\frac{a_2^2}{a_1^2}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{[2k\mathrm{M}_{1n}^2-(k-1)][2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2]}{(k+1)^2\mathrm{M}_{1n}^2}. \tag{5.45}$$

Зная скорость звука за скачком, можно определить число M_2. Так как $v_2^2=v_{2n}^2+v_{2t}^2$, то, подставляя вместо v_{2n} его выражение по формуле (5.41), а вместо v_{2t} равную ей величину v_{1t}, получим:

$$\frac{v_2^2}{v_{1n}^2}=\frac{[2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2]^2}{(k+1)^2\mathrm{M}_{1n}^4}+\frac{v_{1t}^2}{v_{1n}^2}=\left[\frac{2+(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2}{(k+1)\mathrm{M}_{1n}^2}\right]^2+\mathrm{ctg}^2\beta, \tag{5.46}$$

где β есть угол между вектором $\boldsymbol{v}_1$ и касательной плоскостью к поверхности скачка.

Число M_2 за скачком можно теперь выразить через известные величины, а именно:

$$\mathsf{M}_2^2 = \frac{v_2^2}{a_2^2} = \frac{v_2^2}{v_{1n}^2} \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \frac{v_{1n}^2}{a_1^2} = \mathsf{M}_{1n} \frac{v_2^2}{v_{1n}^2} \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Подставляя в это выражение из (5.45) и (5.46) соответствующие отношения, получим:

$$\mathsf{M}_2^2 = \frac{[2+(k-1)\,\mathsf{M}_{1n}^2] + (k+1)^2\mathsf{M}_{1n}^4 \operatorname{ctg}^2\beta}{[2k\mathsf{M}_{1n}^2 - (k-1)]\,[2+(k-1)\,\mathsf{M}_{1n}^2]}. \tag{5.47}$$

Таким образом, все величины, характеризующие движение газа за скачком, полностью определяются по величинам, характеризующим движение газа перед скачком, если известен угол между $\boldsymbol{v}_1$ и касательной плоскостью к поверхности скачка.

Для воздуха при $k=1{,}4$ формулы (5.41) — (5.47) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{\mathsf{M}_{1n}^2+5}{6\mathsf{M}_{1n}^2}, && \frac{p_2}{p_1} = \frac{7\mathsf{M}_{1n}^2-1}{6},\\
&\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{6\mathsf{M}_{1n}^2}{\mathsf{M}_{1n}^2+5}, && \frac{T_2}{T_1} = \frac{(7\mathsf{M}_{1n}^2-1)(\mathsf{M}_{1n}^2+5)}{36\mathsf{M}_{1n}^2},\\
&\frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{(7\mathsf{M}_{1n}^2-1)(\mathsf{M}_{1n}^2+5)}{36\mathsf{M}_{1n}^2}, && \mathsf{M}_2^2 = \frac{(5+\mathsf{M}_{1n}^2)^2 + 36\mathsf{M}_{1n}^4\operatorname{ctg}^2\beta}{(7\mathsf{M}_{1n}^2-1)(5+\mathsf{M}_{1n}^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Проанализируем полученные решения. Из равенств (5.41) видно, что если $v_{1n}=a_1$, т. е. если $\mathsf{M}_{1n}=1$, то $v_{2n}=v_{1n}$ и скачок отсутствует. Если $\mathsf{M}_{1n}<1$, то получается, что $v_{2n}<v_{1n}$ и, как это следует из выражения (5.42), $\rho_2<\rho_1$, т. е. мы имеем скачок разрежения. Однако в дальнейшем (§ 17) будет показано, что это физически невозможно. Таким образом, мы приходим к выводу, что при наличии скачка уплотнения $M_{1n}>1$ или, иначе говоря, что *нормальная составляющая скорости перед скачком больше скорости звука;* при этом $v_{2n}<v_{1n}$. Из этого неравенства, однако, не следует, какова будет величина v_{2n} по отношению к скорости звука. Для выяснения этого формулу (5.41) удобно представить в несколько ином виде. Введем в нее критическую скорость, воспользовавшись соотношением

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\,\frac{p_1}{\rho_1} = v_{\text{кр}}^2\,\frac{k+1}{2(k-1)},$$

из которого следует:

$$\frac{kp_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2}\,v_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{2}\,v_1^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (5.41) и принимая во внимание, что $v_1^2 = v_{1n}^2 + v_{1t}^2$, получим:

$$v_{2n} = \frac{1}{v_{1n}}\left(v_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_{1t}^2\right). \tag{5.49}$$

Здесь величину $v_{\text{кр}}$ мы пишем без индекса, так как по доказанному в предыдущем параграфе она одинакова для частей струйки перед скачком и за скачком.

Из последнего равенства видно, что так как составляющая скорости, нормальная к поверхности скачка, перед скачком сверхзвуковая, то *за скачком она будет дозвуковая.* В самом деле, так как $v_{1n} > a_1$, то $v_{1n} > v_{\text{кр}}$; поэтому $\frac{v_{\text{кр}}^2}{v_{1n}} < v_{\text{кр}}$, а значит, подавно $v_{2n} < v_{\text{кр}}$ и, следовательно, $v_{2n} < a_2$. В частном случае, если скачок прямой, т. е. поверхность скачка пересекается струйкой под прямым углом, то $v_{1t} = 0$, $v_{1n} = v_1$ и формула (5.42) принимает вид

$$v_2 v_1 = v_{\text{кр}}^2. \tag{5.50}$$

Отсюда видно, что так как перед прямым скачком скорость сверхзвуковая, то за ним скорость всегда будет дозвуковой.

Из формулы (5.41) следует также, что при неограниченном возрастании M_{1n} отношение v_{2n}/v_{1n} стремится к конечной величине, равной $(k-1)/(k+1)$, которая при $k = 1{,}4$ равна $1/6$.

С возрастанием числа M_{1n} плотность за скачком, как это следует из формулы (5.42), увеличивается и при неограниченном возрастании числа M_{1n} стремится к конечному пределу, равному $(k+1)/(k-1)$, несмотря на то, что давление при этом, как видно из формулы (5.43), неограниченно возрастает; в этом состоит отличие ударного сжатия в скачке от плавного сжатия. Рассматривая выражения (5.44), (5.45) и (5.48), замечаем, что с возрастанием M_{1n} температура и скорость звука за скачком увеличиваются, а число M_2 уменьшается и при неограниченном возрастании M_{1n} температура и скорость звука неограниченно растут, а число M_2 стремится к предельному значению, равному

$$\mathsf{M}_{2\text{пред}} = \sqrt{\frac{(k-1)^2 + (k+1)^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{2k(k-1)}}.$$

§ 17. Ударные волны в газовой среде. Скорость перемещения ударной волны

Мы рассматривали в предыдущих параграфах обтекание газом неподвижного тела и в связи с этим — неподвижные скачки уплотнения в газовой среде. Однако если тело движется, то вместе с ним перемещаются и скачки уплотнения. Точно так же при взрыве в газовой среде возникают взрывные или ударные волны, которые представляют